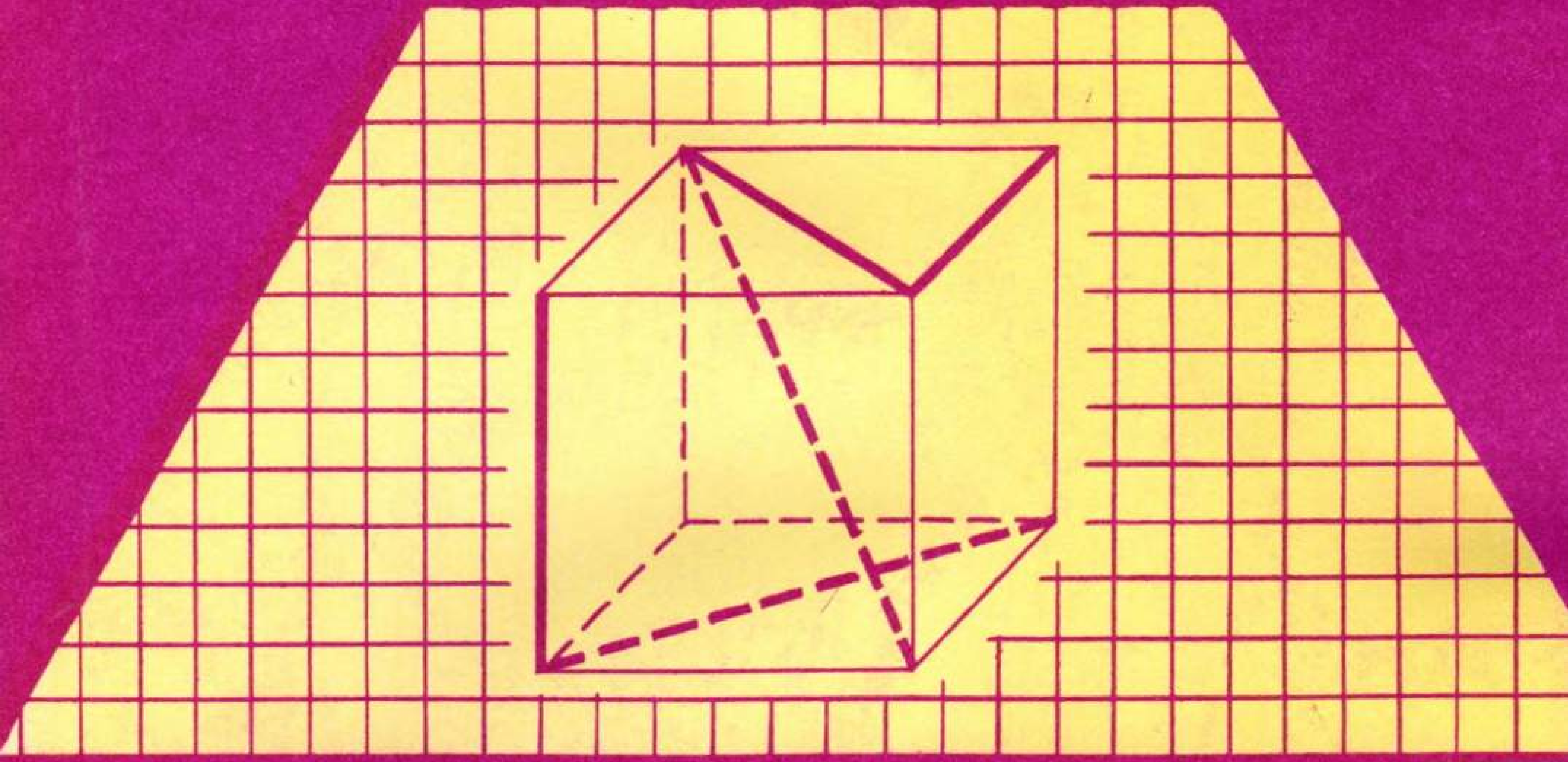
Б. Г. ЗИВ

ГЕОМЕТРИЯДӘН ДИДАКТИК МАТЕРИАЛЛАР



10 сыйныф

Б. Г. ЗИВ

ГЕОМЕТРИЯДӘН ДИДАКТИК МАТЕРИАЛЛАР

Татар урта гомуми
белем мәктәбенең
10 нчы сыйныфы өчен

КАЗАН • «МӘГАРИФ» НӘШРИЯТЫ • 2000

УДК 373.167.1
ББК 74.262.21
З-47

Зив Б. Г.

Дидактические материалы по геометрии для 10 класса.—М.: Просвещение, 1994.

Шушы китап материалларын нәшрият рөхсәтеннән башка янадан бастырып чыгару «Автор хокукы һәм эргәдәш хокуклар турында» Россия Федерациясе Законын бозу була. Моның өчен закон нигезендә җавапка тарту каралган.

Зив. Б. Г.

З-47 Геометриядән дидактик материаллар: Татар урта гомуми белем мәктәбенең 10 нчы с-фы өчен / Русчадан З. Х. Җилалова тәрҗ.—Казан: Мәгариф, 2000.— 144 б.: рәс. б-н.
ISBN 5-7761-0432-7

Ярдәмлектә геометриядән мөстәкыйль һәм контроль эшләр, шулай ук математик диктантлар бирелгән. Ул Л. С. Атанасян һ. б. тарафыннан язылган «Геометрия, 10—11» дәреслегенә яраштырып төзелгән; аны шулай ук башка авторлар язган геометрия дәреслекләре белән эшләгәндә дә файдаланырга мөмкин.

БЗ—63—80—97/98

ISBN 5-7761-0432-7

© Зив Б. Г., 1994
© Татарчага тәрҗемә. «Мәгариф» нәшрияты, 2000

СҮЗ БАШЫ

Ярдәмлектә 23 мөстәкыйль эш, 2 өстәмә мөстәкыйль эш, 5 контроль эш һәм 4 математик диктант тәкъдим ителгән. Өстәмә эшләр дәреслектә турыдан-туры күрсәтелмәгән, ләкин факультатив дәресләрдә файдаланырга мөмкин булган темалар буенча бирелгән.

Мөстәкыйль эшләр — **М**, өстәмә эшләр — **ӨМ**, контроль эшләр — **К**, математик диктант **МД** хәрефе һәм тиешле номер белән тамгаланган. Тәкъдим ителгән мөстәкыйль эшләрнең төп максаты — укытучыга укучыларның мәсьәләләр чишкәндәге эшчәнлеген аларның шәхси үзенчәлекләренә һәм хәзерлек дәрәҗәсенә карап оештырырга ярдәм итү. Моннан тыш, мөстәкыйль эшләрне укучыларның уку барышында эшләү осталыгын һәм күнекмәләрен тикшерү өчен файдаланырга мөмкин.

Мөстәкыйль эшләр сигез вариантта бирелгән. Һәр эшнең беренче һәм икенче вариантларында тәкъдим ителгән мәсьәләләрне чишү өчен укучы программадагы минималь таләпләр күләмендәге белемен кулланырга тиеш була.

Өченче һәм дүртенче вариантлар уртача катлаулылыктагы мәсьәләләрдән тора. Бу вариантлардагы мәсьәләләр катлаулылыгы ягыннан дәреслектәге төп мәсьәләләрнең күпчелегенә туры килә диярлек.

Бишенче һәм алтынчы вариантлар хәзерлеклерәк укучылар өчен бирелә. Бу вариантлардагы мәсьәләләрне чишү өчен белемнәрне катлаулырак очракларда куллана белү осталыгы, исәпләү һәм бердәй рәвешүзгәртү күнекмәләренең камил булуы таләп ителә. Бу мәсьәләләр катлаулылыгы ягыннан дәреслектәге төп һәм өстәмә мәсьәләләр белән бер дәрәҗәдә дияргә була.

Җиденче һәм сигезенче вариантлардагы мәсьәләләрне чишү өчен белемнәрне иҗади куллану таләп ителә. Монда шактый катлаулы геометрик шартларга анализ ясарга, мөстәкыйль рәвештә яңа очракларны ачарга һәм алар арасындагы бәйләнешне ачыкларга туры килә. Җиде һәм сигезенче варианттагы мәсьәләләрне сыйныфтагы барлык укучылар белән беррәттән төп эшләрен эшләгәннән соң вакытлары калган укучыларга яки өй эшләре өчен мәҗбүри саналмаган бирем рәвешендә тәкъдим итәргә, шулай ук факультатив дәресләрдә яки математик түгәрәкләрдә файдаланырга мөмкин.

Укытучыга һәр эштәге барлык биремнәрне дә укучылар белән эшләргә омтылуның кирәге юк. Дәреснең максатына, вакытының күпме булуына һәм укучыларның хәзерлек дәрәҗәсенә карап, укытучы әлеге ярдәмлектә китерелгән биремнәрдән теләгән авырлык-

тагы һәм үзенә кирәкле күләмдәге бирем сайлап ала алыр дип уйлыйбыз.

Өстәмә мөстәкыйль эшләр алты вариантта катлаулылыгы арта бару тәртибендә төзелгән. Контроль эшләр дүрт варианттан тора. Алар 10 нчы сыйныф курсының һәр темасы буенча алган белемнәрне тикшереп йомгак ясау өчен билгеләнгән. Барлык вариантларның да катлаулылыгы якынча бертөрле. Һәр вариантта да «*» белән тамгаланган бирем бар. Бу биремнәр белемнәрне иҗади куллануны, стандарт булмаган геометрик конфигурацияләрне анализлауны таләп итә. Билге укучыларның бары тик төп эшләре өчен генә куела, ә өстәмә мәсьәләне чишкән укучыларга укытучы бу эшләре өчен тагын икенче билге дә куя ала.

Математик диктант укучыларның теоретик белемен системага салу өчен билгеләнә. Диктант турыдан-туры теорияне куллану өчен бирелгән зур булмаган мәсьәләләрдән тора. Диктант үткәргәндә укытучы берничә минут эчендә укучы җавап бирергә тиеш булган сорау яки мәсьәлә тәкъдим итә. Җавап бирү өчен тиешле вакытны, сорауның катлаулылыгына һәм укучыларның хәзерлек дәрәҗәсенә карап, укытучы билгели. Андый эшкә якынча 35 минут вакыт бирергә мөмкин. Соңыннан укытучы сыйныф белән берлектә җавапларны тикшерә, укучыларның игътибарын җибәрелгән ялгышларга юнәлтә.

Кайсы мәсьәләнең текстын гына, ә кайсы мәсьәләнең сызымын да бирергә икәнен укытучы хәл итә. Ул шулай ук диктанттагы барлык сорауларны да бирмичә, өлешчә генә дә тәкъдим итә ала. Ярдәмлекнең ахырында барлык мөстәкыйль эшләрнең һәм контроль эшләрнең җаваплары китерелгән. Катлаулырак мәсьәләләргә күрсәтмәләр яки мәсьәләнең чишелеше бирелгән.

Автор

МӨСТӘКЫЙЛЬ ЭШЛӘР

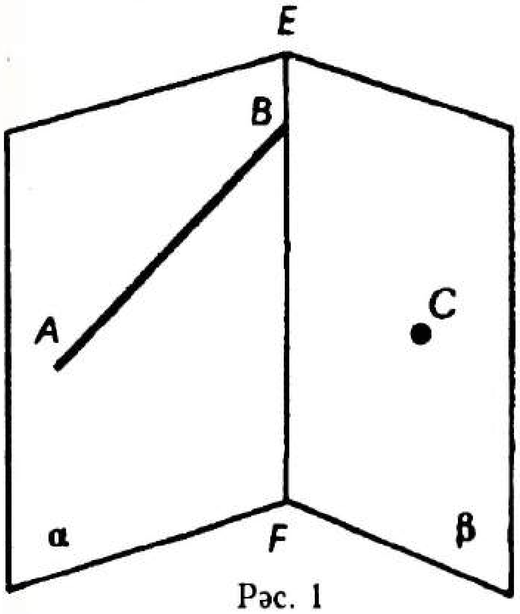
1 НЧЕ ВАРИАНТ

М—1

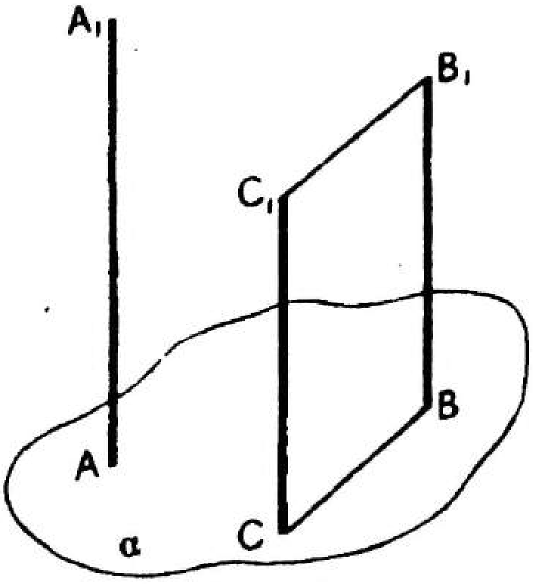
1. *A*, *B*, *C* нокталары бер турыда ятмый. $M \in AB$; $K \in AC$; $X \in MK$. *X* ноктасының *ABC* яссылыгында ятканын исбатлагыз.
2. α һәм β яссылыклары *m* турысы буйлап кисешәләр. *a* турысы α яссылыгында ята һәм β яссылыгын кисеп үтә. *a* һәм *m* турылары кисешәме? Ни өчен?

М—2

1. 1 нче рәсемдә α һәм β яссылыклары *EF* турысы буйлап кисешәләр. *AB* турысы α яссылыгында ята. β яссылыгында *C* ноктасы аша:



Рәс. 1



Рәс. 2

1) *AB* турысын кисеп үтәрлек итеп;
2) *AB* турысы белән чалышма булырлык итеп;
3) *AB* турысына параллель булырлык итеп туры үткәрегез.

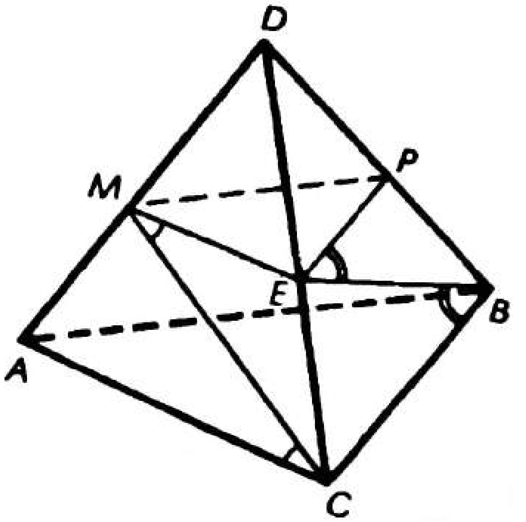
2. 2 нче рәсемдә $AA_1 \parallel CC_1$, $AA_1 \parallel BB_1$, $BB_1 = CC_1$. $B_1C_1 = BC$ икәнен исбатлагыз.

М—3

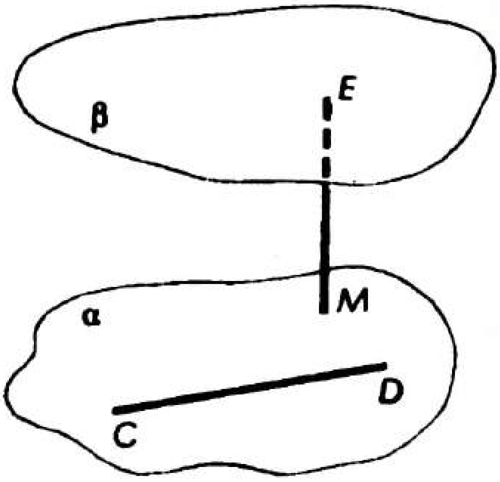
1. *ABCD* параллелограммында *E* һәм *F* нокталары *AB* һәм *CD* якларында ята, өстәвенә $BE : EA = CF : FD$. Бу нокталар аша α яссылыгы үткәрелгән. $BC \parallel \alpha$ икәнен исбатлагыз.
2. *a* турысы α яссылыгына параллель. *a* турысы аша α яссылыгын *b* турысы буйлап кисүче β яссылыгы үткәрелгән. α яссылыгында *a* турысына параллель *c* турысы бар. $b \parallel c$ икәнен исбатлагыз.

М—4

1. $\angle EMC = \angle MCA$ һәм $\angle PEB = \angle EBC$ итеп бирелгән (рәс. 3). MEP һәм ABC яссылыкларының параллель икәнен исбатлагыз.
2. CD кисемтәсе α яссылыгында ята. EM кисемтәсенең очлары α һәм β параллель яссылыкларында ята (рәс. 4). ECD, EMC һәм EMD яссылыкларының β яссылыгы белән кисешү сызыкларын төзегез.



Рәс. 3



Рәс. 4

М—5

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. BE кисемтәсе A_1BD яссылыгында ята. BE ның B_1D_1C яссылыгына параллель икәнен исбатлагыз.
2. $ДABC$ тетраэдрында $\angle DBC = \angle DBA = \angle ABC = 90°$, $BD = BA = BC = 2$ см. ADC кырының мәйданын табыгыз.

М—6

1. $DABC$ тетраэдрынын P, M һәм K нокталары аша үтүче яссылык белән кисемен төзегез, монда $P \in AD$; $M \in BD$ һәм $K \in BC$, өстәвенә $AP = PD$ һәм $DM = MB$.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында $ABCD$ нигезе — ягы 8 см га тигез квадрат, калган кырлары — турыпочмаклыклар. Ян кабыргасы 3 см га тигез. E — A_1B_1 нең уртасы. Параллелепипеднын AC һәм E ноктасы аша үтүче яссылык белән кисемен төзегез һәм кисемнең периметрын табыгыз.

М—7

1. ABC — төзек өчпочмак, O — аның үзәге, OM — ABC яссылыгына перпендикуляр, $OM = 1$. Өчпочмакның ягы 3 кә тигез. M ноктасыннан өчпочмакның түбәләренә кадәр ераклыкны табыгыз.
2. $ABCD$ — параллелограмм, BE һәм FD — ABC яссылыгына перпендикуляр. ABE һәм DFC яссылыкларының параллель икәнен исбатлагыз.

М—8

1. $ABCD$ — квадрат, $EA \perp BC$; $K \in EB$. $BC \perp AK$ икәнен исбатлагыз.
2. ABC өчпочмагының ($\angle C = 90°$) AC ягы аша α яссылыгы үткәрелгән; $BB_1 \perp \alpha$, $CB_1 \perp AC$; $AB = 25$, $AC = 24$. ABC өчпочмагының мәйданын табыгыз.

М—9

M ноктасыннан α яссылыгына озынлыклары 18 см һәм $2\sqrt{109}$ см булган ике авышма үткәрелгән. Аларның бу яссылыкка булган проекцияләре $3:4$ кә чагыштырмасында. M ноктасыннан α яссылыгына кадәр ераклыкны табыгыз.

М—10

1. ABC өчпочмагында $AB = BC = 25$, $AC = 48$, BD — ABC яссылыгына перпендикуляр, $BD = \sqrt{15}$. D ноктасыннан AC турысына кадәр ераклыкны табыгыз.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында $ABCD$ — ягы 2 см га тигез квадрат. Барлык ян кырлары — турыпочмаклыклар, $B_1D = 5$ см. B_1D белән ABC яссылыгы һәм B_1D белән DD_1C_1 яссылыгы арасындагы почмакларны табыгыз.

М—11

1. Икекырлы почмакның кабыргасы белән аның сызыкча почмагы яссылыгында яткан теләсә нинди туры арасындагы почмак нәрсәгә тигез?
2. ABC өчпочмагы — турыпочмаклы ($\angle C = 90°$), $\angle A = 30°$, $AC = a$, $DC \perp ABC$; $DC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. ADB һәм ACB яссылыклары арасындагы почмак нәрсәгә тигез?

М—12

1. *AMB* өчпочмагы белән *ABCD* турыпочмаклыгы яссылыклары үзара перпендикуляр булырлык итеп урнашкан. *MAD* почмагының туры почмак икәнен исбатлагыз.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ турыпочмаклы параллелепипедында *E*, *F* һәм *K* нокталары — тиңдәшле рәвештә A_1B_1, A_1D_1 һәм *AD* кабыргаларының урталары; $AB = 4$, $AA_1 = 6$, $A_1C = \sqrt{56}$.
1) Параллелепипедның *E*, *F* һәм *K* нокталары аша үтүче яссылык белән кисемен төзегез һәм кисем яссылыгы белән нигез яссылыгының үзара перпендикуляр икәнен исбатлагыз.
2) *AD* ны табыгыз.

М—13

1. $ABCA_1B_1C_1$ өчпочмаклы төзек призмасының нигез яклары $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ кә, ә ян кабыргасы $2\sqrt{3}$ кә тигез, *M* — CC_1B_1B кырының үзәге. *AM* турысы белән нигез яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.
2. Дүртпочмаклы төзек призма нигезенең яклары 4 см га тигез. Нигезенең диагонале аша, нигез яссылыгына 45° лы почмак ясап, ян кабыргасын кисүче яссылык үткәрелгән. Кисем мәйданын табыгыз.

М—14

$ABCA_1B_1C_1$ туры призмасының нигезендә *ACB* турыпочмаклы өчпочмагы ята ($\angle C = 90°$) $AC = 4$, $BC = 3$. *AC* ягы һәм B_1 түбәсе аша яссылык үткәрелгән; $\angle B_1AC = 60°$. Призманың ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—15

1. $ABCA_1B_1C_1$ өчпочмаклы авыш призмасында *ABC* турыпочмаклы өчпочмагы ($\angle C = 90°$) нигез булып хезмәт итә. AA_1C_1C кырының яссылыгы нигез яссылыгына перпендикуляр. CC_1B_1B ның турыпочмаклык икәнен исбатлагыз.
2. Өчпочмаклы авыш призмада ике ян кырының мәйданы 70 см^2 га һәм 150 см^2 га тигез, алар арасындагы почмагы 60°. Ян кабыргасы 10 см га тигез. Призманың ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—16

1. Дүртпочмаклы төзек пирамиданың биеклеге 4 см га тигез, ә нигез диагоналенең озынлыгы $6\sqrt{2}$ см. Пирамиданың тулы өслеге мәйданын табыгыз.
2. Өчпочмаклы төзек пирамидада нигезенең ягы a, ә биеклеге $2a$ га тигез. Ян кабыргаларының һәм ян кырларының нигез яссылыгына авышлык почмакларын табыгыз.

М—17

1. $MABC$ пирамидасының нигезе булып ABC турыпочмаклы өчпочмагы ($\angle C = 90°$) хезмәт итә, $BC = a$, $\angle A = 30°$. Ян кабыргалары нигез яссылыгына 60° лы почмак ясап авышкан. Пирамиданың биеклеген табыгыз.
2. $MABC$ пирамидасында ян кабыргасы MA нигез яссылыгы ABC га перпендикуляр, ә MBC кыры аның белән 60° лы почмак төзи, $AB = AC = 10$, $BC = 16$. Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—18

1. Өчпочмаклы төзек пирамидада нигезенең ягы a га тигез, ә ян кырлары аңа 60° лы почмак ясап авышкан. Нигезенең урта сызыгы аша ян кырына параллель итеп үткәрелгән кисемнең мәйданын табыгыз.
2. Дүрпочмаклы төзек кисек пирамидада нигезләренең яклары 6 см һәм 8 см га тигез, ә ян кырлары нигез яссылыгына 45° лы почмак ясап авышкан. Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—19

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеды бирелгән, $ABCD$ — турыпочмаклык, E һәм F — тиңдәшле рәвештә B_1C_1 һәм C_1D_1 кабыргаларының урталары. Башлангычы һәм ахыры параллелепипедның түбәләрендә булган һәм
1) $\overrightarrow{EF}$ векторы белән бердәй юнәлештәге;
2) $\overrightarrow{AB}$ векторына капма-каршы юнәлештәге;
3) озынлыгы A_1C_1 векторының озынлыгына тигез булган векторларны языгыз.
2. a турысы α яссылыгында ятмый. α яссылыгын b турысы буйлап кисүче β яссылыгы a турысы аша үтә. A һәм B нокталары a турысында, ә C һәм D нокталары b турысында ята. Нинди шарт үтәлгәндә $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{CD}$ векторлары коллинеар булыр?

M—20

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. $\vec{AB} + \vec{B_1C_1} + \vec{DD_1} + \vec{CD}$ суммасына тигез булган векторны күрсәтегез.
2. $\vec{AC_1} - \vec{AC} + \vec{C_1A_1}$ һәм $\vec{A_1A} - \vec{CB} + \vec{AB}$ векторларының капма-каршы икәнен исбатлагыз.

M—21

1. $DABC$ — тетраэдр. $\vec{DM} = 2\vec{DA} - \frac{1}{2}\vec{DC}$ векторын сурәтләп күрсәтегез.
2. K ноктасы ABC өчпочмагы яссылыгында ятмый. E һәм P — тиңдәшле рәвештә AB һәм BC кисемтәләренең урталары. $\vec{KE} - \vec{KP}$ ны $\vec{AC}$ векторы аша күрсәтегез.

M—22

1. $DABC$ тетраэдры бирелгән. K — AC кабыргасының уртасы, M — KD кисемтәсенең уртасы, $\vec{DA} = \vec{a}$, $\vec{DB} = \vec{b}$, $\vec{DC} = \vec{c}$.
   $\vec{BM}$ векторын $\vec{a}$, $\vec{b}$ һәм $\vec{c}$ векторлары буйлап таркатыгыз.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында M — AB_1B өчпочмагы медианаларының кисешү ноктасы. $\vec{DM}$ векторын $\vec{DA}$, $\vec{DC}$ һәм $\vec{DD_1}$ векторлары буйлап таркатыгыз.

M—23

$ABCA_1B_1C_1$ өчпочмаклы төзек призмасында $AB = 2$ см, $AA_1 = 1$ см.

1) Призманың тулы өслеге мәйданын табыгыз.
2) Призманы ACB_1 яссылыгы белән кистергәндәге кисем мәйданын табыгыз.
3) AB_1 турысының ABC яссылыгы белән төзегән почмакны табыгыз.
4) AB_1C һәм ABC яссылыклары арасындагы почмакны табыгыз.
5) $\vec{AA_1} - \vec{AC} + 2\vec{B_1B} - \vec{C_1C}$ векторының озынлыгын табыгыз.
6) A_1C_1 турысының ACB_1 яссылыгына параллель икәнен исбатлагыз.

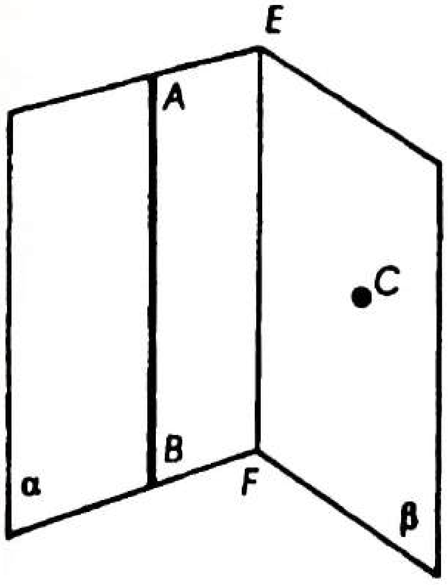
2 НЧЕ ВАРИАНТ

М—1

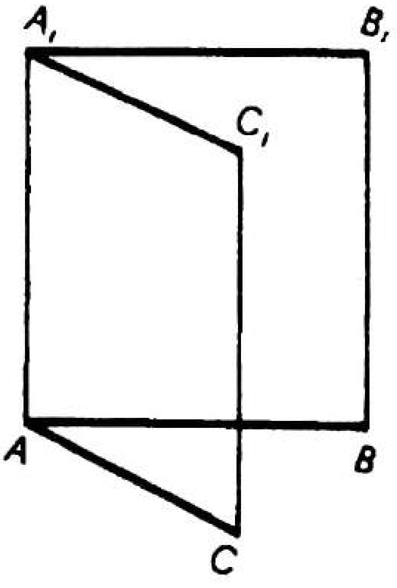
1. a һәм b турылары O ноктасында кисешәләр. $A \in a$, $B \in b$, $Y \in AB$, a, b турыларының һәм Y ноктасының бер яссылыкта ятканын исбатлагыз.
2. Кисешүче α һәм β яссылыклары бирелгән. a турысы α яссылыгында ята һәм β яссылыгын A ноктасында кисеп үтә. b турысы β яссылыгында ята һәм α яссылыгын B ноктасында кисеп үтә. AB турысы α һәм β яссылыкларының кисешү сызыгы икәнен исбатлагыз.

М—2

1. 5 нче рәсемдә α һәм β яссылыклары EF турысы буйлап кисешәләр. AB турысы α яссылыгында ята һәм EF турысына параллель. β яссылыгында C ноктасы аша:



Рәс. 5



Рәс. 6

1) AB турысын кисеп үтәрлек итеп;
2) AB турысы белән чалышма булырлык итеп;
3) AB турысына параллель булырлык итеп, туры үткәрергә.

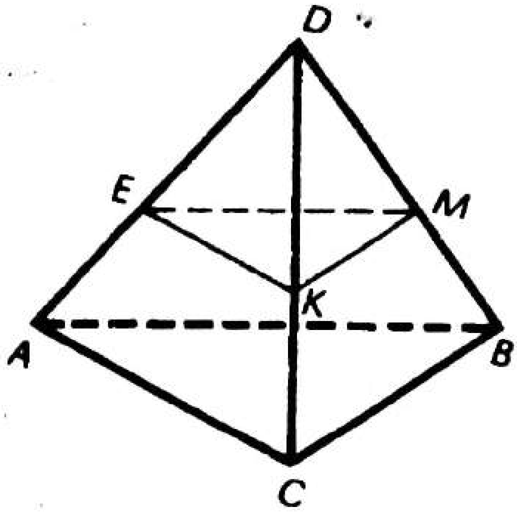
2. 6 нчы рәсемдә $A_1C_1 = AC$, $A_1C_1 \parallel AC$; $A_1B_1 = AB$, $A_1B_1 \parallel AB$. $CC_1 \parallel BB_1$ икәнен исбатлагыз.

М—3

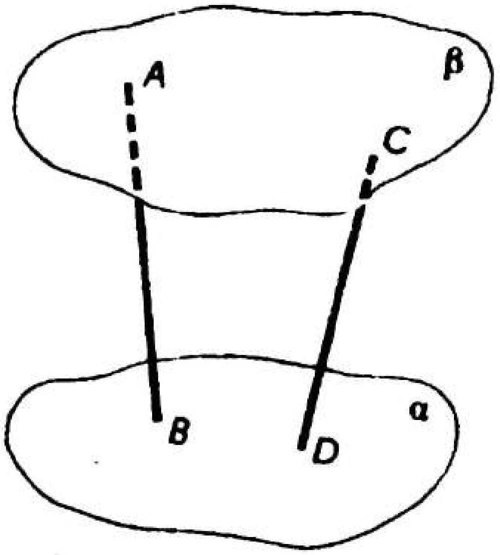
1. E һәм F нокталары тиңдәшле рәвештә ABC өчпочмагының AB һәм BC якларында ята, өстәвенә $BE : EA = 2 : 3$. Бу нокталар аша AC га параллель яссылык үткәрелгән. $BF : FC$ чагыштырмасын табыгыз.
2. α яссылыгында A һәм B нокталары алынган. α яссылыгыннан бер үк юнәлештә, очлары шул нокталарда булган, үзара параллель һәм тигез AA_1 һәм BB_1 кисемтәләре үткәрелгән. $A_1B_1 \parallel \alpha$ икәнен исбатлагыз.

М—4

1. Бирелгән: $\frac{DE}{DA} = \frac{DK}{DC} = \frac{DM}{DB}$ (рәс. 7). EKM һәм ABC яссылыкларының параллель икәнен исбатлагыз.



Рәс. 7



Рәс. 8

2. AB һәм CD кисемтәләренең очлары α һәм β параллель яссылыкларында ята (рәс. 8). ABC яссылыгының α яссылыгы белән һәм BDC яссылыгының β яссылыгы белән кисешү сызыкларын төзегез.

М—5

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. AK турысы AD_1C яссылыгында ята. AK ның A_1C_1B яссылыгына параллель икәнен исбатлагыз.
2. $DABC$ тетраэдрында $\angle DBC = \angle DBA = \angle ABC = 60°$, $BD = BA = BC = 4$ см. ADC кырының мәйданын табыгыз.

М—6

1. $DABC$ тетраэдрында $DA = DC = 13$, $AC = 10$, E — BC ның уртасы. Тетраэдрның E ноктасы аша ADC яссылыгына параллель үтүче яссылык белән кисемен төзегез һәм кисем мәйданын табыгыз.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында $P \in A_1D_1$ һәм $K \in B_1C_1$. Параллелепипедның P һәм K нокталары аша AA_1 гә параллель үтүче яссылык белән кисемен төзегез.

М—7

1. $ABCD$ — ягы $\sqrt{2}$ гә тигез булган квадрат, O — аның диагональләренең кисешү ноктасы, OE исә ABC яссылыгына перпендикуляр, $OE = \sqrt{3}$. E ноктасыннан квадратның түбәләренә кадәр ераклыкны табыгыз.
2. ABC өчпочмагы бирелгән. AD һәм BE — ABC яссылыгына перпендикулярлар. DAC һәм EBC яссылыкларының кисешү сызыгы белән AD һәм BE турыларының үзара торышы нинди?

М—8

1. ABC турыпочмаклы өчпочмагы ($\angle C = 90°$) бирелгән, $E \in BC$, $EM \perp ABC$. $AC \perp MB$ икәнен исбатлагыз.
2. $ABCD$ — параллелограмм. $AD = 4$, $CD = 6$, MC исә ABC яссылыгына перпендикуляр, $MD \perp AD$. Параллелограммның мәйданын табыгыз.

М—9

M ноктасыннан α яссылыгына ике авышма үткәрелгән. Алар α яссылыгына проекцияләре белән $30°$ лы почмаклар төзиләр. Авышмалар арасындагы почмак $90°$ ка тигез. M ноктасыннан α яссылыгына кадәр ераклык $\sqrt{2}$ см га тигез булса, авышмаларның нигезләре арасындагы ераклыкны табыгыз.

М—10

1. ABC өчпочмагы турыпочмаклы ($\angle C = 90°$), $\angle A = 30°$, $AC = a$, $MC \perp ABC$, $MC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. M ноктасыннан AB турысына кадәр ераклыкны табыгыз.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында $ABCD$ — турыпочмаклык. Барлык ян кырлары шулай ук турыпочмаклылар. $AD = 12$, $CD = 5$, $A_1C = 15$. A_1C белән ABC яссылыгы арасындагы һәм A_1C белән BB_1C_1 яссылыгы арасындагы почмакларны табыгыз.

М—11

1. α яссылыгы икекырлы почмакның кырларын AB һәм AC турылары буйлап кисә. α яссылыгында яткан кисешүче ике туры бу почмакның кабыргасына перпендикуляр. $\angle BAC$ бу икекырлы почмакның сызыкча почмагы икәнен исбатлагыз.
2. $ABCD$ — ромб. $\angle A = 60°$, $AB = m$, $BE \perp ABC$, $BE = \frac{m\sqrt{3}}{2}$. AED һәм ABC яссылыклары арасындагы почмакны табыгыз.

М—12

1. $ABCD$ турыпочмаклыгы белән $BEMC$ параллелограммы яссылыклары үзара перпендикуляр булырлык итеп урнашкан. $\angle MCD$ ның туры почмак икәнен исбатлагыз.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ турыпочмаклы параллелепипедында E ноктасы — C_1D_1нең уртасы, $AD = 5$, $AB = 4$, $B_1D = \sqrt{77}$.
1) Параллелепипедның AD һәм E ноктасы аша үтүче яссылык белән кисемен төзегез һәм кисем яссылыгының DD_1C_1C ян кыры яссылыгына перпендикуляр икәнен исбатлагыз.
2) AA_1 не табыгыз.

М—13

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дүртпочмаклы төзек призмасында нигезенең ягы 1 гә, ян кыр кабыргасы $\sqrt{5}$ кә тигез, K исә AA_1B_1B кырының үзәге. KC турысы белән нигез яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.
2. Өчпочмаклы төзек призмада нигезенең урта сызыгы аша, нигез яссылыгына 60° лы почмак ясап, ян кабыргасын кисүче яссылык үткәрелгән. Нигезенең ягы 4 см га тигез булса, кисем мәйданын табыгыз.

М—14

$ABCA_1B_1C_1$ туры призмасының нигезендә ACB турыпочмаклы өчпочмагы ($\angle C = 90°$) ята. BC ягы һәм A_1 түбәсе аша яссылык үткәрелгән, $\angle BA_1C = 30°$, $A_1B = 10$, $AC = 5$. Призманың ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—15

1. $ABCD$ турыпочмаклыгы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ авыш параллелепипедының нигезе булып хезмәт итә. AA_1D_1D кыры нигез яссылыгына перпендикуляр. DD_1C_1Cның турыпочмаклык икәнен исбатлагыз.
2. Өчпочмаклы авыш призмада ике кырының мәйданнары 15 см^2 һәм 25 см^2 га тигез. Алар арасындагы почмагы 120°. Ян кабыргасының озынлыгы 5 см. Призманың ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—16

1. Өчпочмаклы төзек пирамиданың биеклеге 12 см, ә нигезенең биеклеге 15 см. Пирамиданың тулы өслеге мәйданын табыгыз.
2. Дүртпочмаклы төзек пирамиданың нигезенең ягы a га, ә биеклеге $3a$ га тигез. Ян кабыргаларының һәм ян кырларының нигез яссылыгына авышлык почмакларын табыгыз.

М—17

1. $MABC$ пирамидасының нигезендә $AB = a$ һәм $\angle ACB = 150°$ булган ABC өчпочмагы ята. Ян кабыргалары нигез яссылыгына 45°лы почмак ясап авышкан. Пирамиданың биеклеген табыгыз.
2. $PEFM$ пирамидасының нигезендә тигезьянлы өчпочмак ята, $EF = EM$, $MF = 20\sqrt{6}$. PE ян кабыргасы 10 га тигез һәм нигез яссылыгына перпендикуляр. PE белән MPF яссылыгы арасындагы почмагы 60°ка тигез. Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—18

1. Дүртпочмаклы төзек пирамидада нигезенең ягы a га тигез, ә ян кабыргалары нигез яссылыгына 60° лы почмак ясап авышкан. Нигез диагонале аша, ян кабыргасына параллель итеп, яссылык үткәрелгән. Кисем мәйданын табыгыз.
2. Өчпочмаклы төзек кисек пирамидада нигезләренең яклары 6 см һәм 8 см га тигез, ә ян кырлары нигез яссылыгына 60°лы почмак ясап авышкан. Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—19

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ туры параллелепипедында K һәм M нокталары — тиңдәшле рәвештә AD һәм DD_1 кабыргаларының урталары. Башлангычы һәм ахыры параллелепипедның түбәләрендә яткан һәм:

1) $\overrightarrow{KM}$ векторына капма-каршы юнәлгән;
2) $\overrightarrow{DC}$ векторы белән бердәй юнәлешле булган;
3) озынлыгы $\overrightarrow{A_1B}$ векторының озынлыгына тигез булган векторларны языгыз.

2. γ яссылыгы α һәм β яссылыкларын тиңдәшле рәвештә a һәм b турылары буйлап киссен ди: $A\in a$, $B\in b$, $C\in b$, $D\in b$. $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{CD}$ векторларының коллинеар булуы мөмкинме? Мөмкин икән, шундый мөмкинлекнең берсен булса да күрсәтегез.

М—20

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{C_1D_1}+\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{DB_1}$ суммасына тигез векторларны күрсәтегез.
2. $-\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{KF}$ һәм $\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{EC}$ векторларының капма-каршы икәнен исбатлагыз.

М—21

1. $FABC$ — тетраэдр. $\overrightarrow{FK}=1{,}5\overrightarrow{CB}+0{,}5\overrightarrow{CF}$ векторын сурәтләп күрсәтегез.
2. ABC өчпочмагында E һәм F нокталары — тиңдәшле рәвештә AB һәм BC якларының урталары. M ноктасы ABC өчпочмагы яссылыгында ятмый. $\overrightarrow{CA}$ ны $\overrightarrow{MF}$ һәм $\overrightarrow{ME}$ векторларының аермасы аша күрсәтегез.

M—22

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, M исә DC_1 һәм D_1C ның кисешү ноктасы; $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$. $\overrightarrow{AM}$ векторын $\vec{a}$, $\vec{b}$ һәм $\vec{c}$ векторлары буйлап таркатыгыз.
2. $DABC$ тетраэдрында M — ABC өчпочмагы медианаларының кисешү ноктасы. $\overrightarrow{DM}$ векторын $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ һәм $\overrightarrow{CD}$ векторлары буйлап таркатыгыз.

M—23

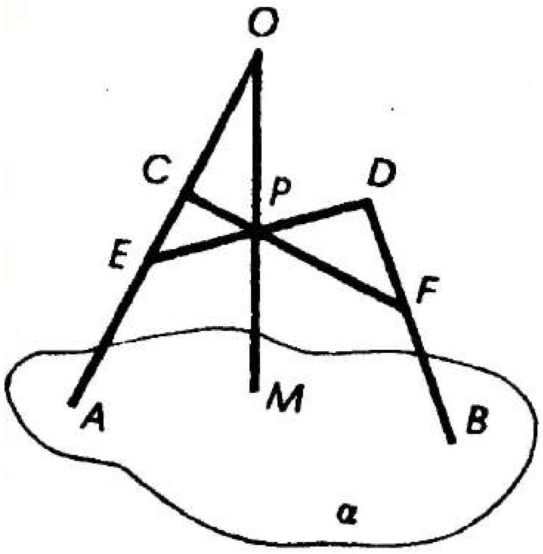
$EABCD$ дүртпочмаклы төзек пирамидасының кабыргасы $EA = 2\sqrt{2}$ см, $AB = 2$ см.

1) Пирамиданың тулы өслеге мәйданын табыгыз.
2) Пирамиданың AEC яссылыгы белән киселе мәйданын табыгыз.
3) EC турысы белән ABC яссылыгы арасында төзелгән почмакны табыгыз.
4) $ECД$ һәм ABC яссылыклары арасындагы почмакны табыгыз.
5) $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE}$ векторының озынлыгын табыгыз.
6) AEC һәм ABC яссылыкларының үзара перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

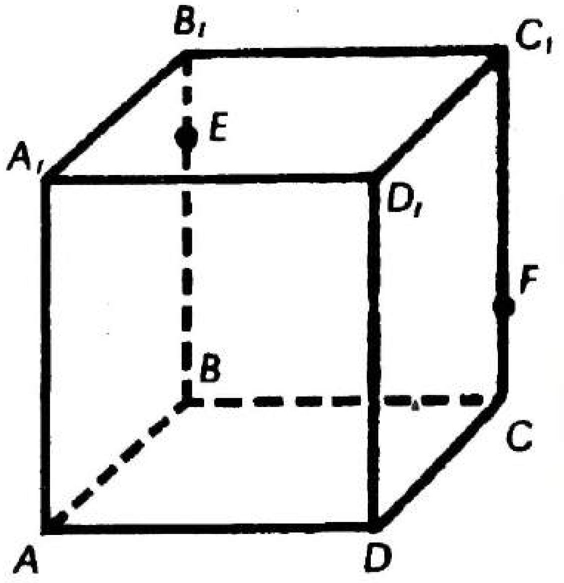
3 НЧЕ ВАРИАНТ

М—1

1. Сызымның ялгышы кайда (рәс. 9)? Аңлатып бирегез. Сызымны дөрес итеп сызыгыз.
2. 10 нчы рәсемдәге бирелгәннәр буенча төзегез:



Рәс. 9

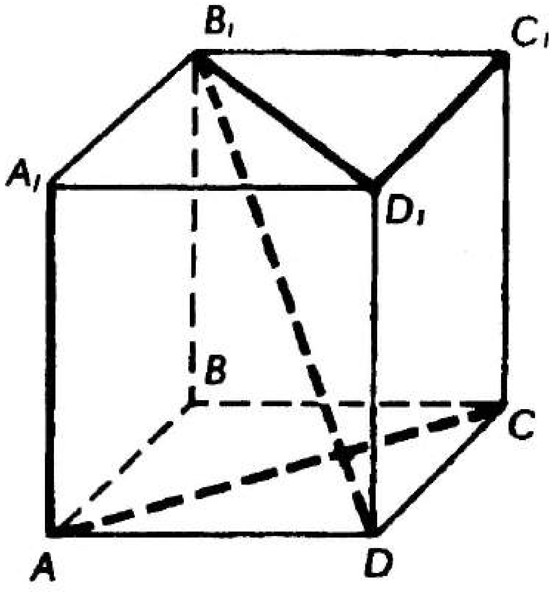


Рәс. 10

1) EF турысының ABC һәм $A_1B_1C_1$ яссылыклары белән кисешү нокталарын;
2) ADF һәм EFD яссылыкларының кисешү сызыгын;
3) EFD һәм ABC яссылыкларының кисешү сызыгын.

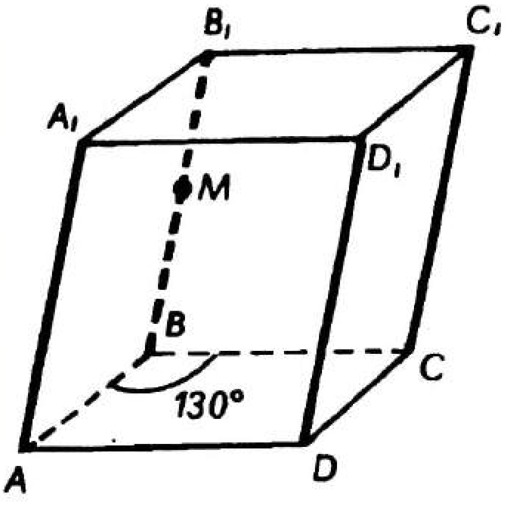
М—2

1. AA_1 һәм C_1D_1, AA_1 һәм B_1D, AC һәм B_1D_1 нең чалышма турылар икәнен исбатлагыз (рәс. 11).
2. b турысы α яссылыгында ята. a турысы α яссылыгында ятмый һәм b турысына параллель. α яссылыгында яткан M ноктасы аша ($M \notin b$), a га параллель итеп, c турысы үткәрелгән. c ның α яссылыгында ятканын исбатлагыз.



Рәс. 11

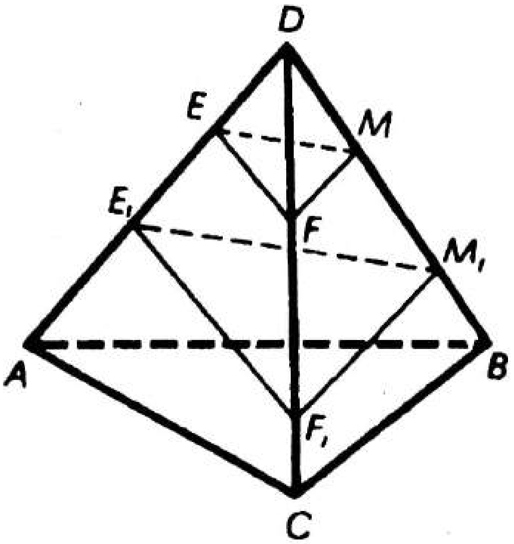
М—3



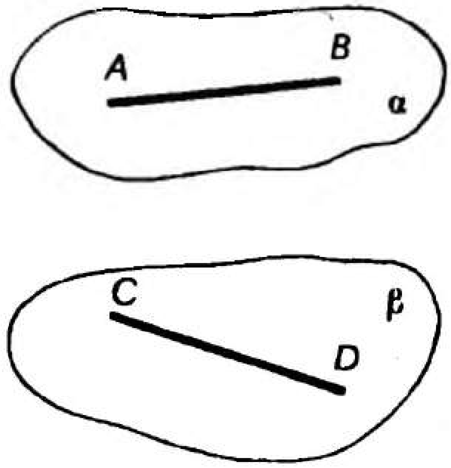
Рәс. 12

1. $a \| b$, $a \| \alpha$. b турысы белән α яссылыгы үзара ничек урнашкан? Аңлатып бирегез.
2. 12 нче рәсемдә $ABCD$ — параллелограмм, $\angle ABC = 130°$, $AA_1 \| BB_1 \| \| CC_1 \| DD_1$ һәм $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$.
1) AMD яссылыгының AA_1B_1, BB_1C_1 һәм DD_1C_1 яссылыклары белән кисешү сызыкларын төзегез.
2) AB һәм A_1D_1 турылары арасындагы почмакны табыгыз.

М—4



Рәс. 13



Рәс. 14

1. 13 нче рәсемдә $EF \| E_1F_1$ һәм $EM \| E_1M_1$. $\angle DFM = \angle DFM_1$ икәнен исбатлагыз.
2. AB һәм CD кисемтәләре тиңдәшле рәвештә α һәм β параллель яссылыкларында ята (рәс. 14). AD һәм BC турыларының торышы турында нәрсә әйтергә мөмкин?

М—5

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында E һәм F нокталары тиңдәшле рәвештә B_1C_1 һәм C_1D_1 нең урталары, $AA_1 \perp EF$. $B_1D = BD_1$ икәнен исбатлагыз.
2. $DABC$ тетраэдрында $\angle DBC = \angle DBA = 60°$, $BA = BC = 5$ см, $DB = 8$ см, $AC = 8$ см. ADC өчпочмагының мәйданын табыгыз.

М—6

1. $DABC$ тетраэдрында M ноктасы — AD ның уртасы, $P \in DC$ һәм $DP : PC = 1 : 3$. Тетраэдрның M һәм P нокталары аша BC га параллель үтүче яссылык белән кисемен төзегез. Тетраэдрның барлык кабыргалары да a га тигез булса, кисем мәйданын табыгыз.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедының M, P һәм E нокталары аша (монда $M \in B_1C_1$. $P \in CC_1$ һәм $E \in AB$) үтүче яссылык белән кисемен төзегез.

М—7

1. AB кисемтәсе α яссылыгын кисми, $AC \perp \alpha$ һәм $BD \perp \alpha$. $AC = 20$, $BD = 30$, $M \in AB$, өстәвенә $AM : MB = 2 : 3$, $MM_1 \perp \alpha$. MM_1 не табыгыз.
2. $a \perp \alpha$ һәм $a \perp \beta$. γ яссылыгы α яссылыгын — b турысы буйлап, ә β яссылыгын c турысы буйлап кисә. b һәм c турыларының үзара торышы нинди?

М—8

1. $ABCD$ — квадрат. MD кисемтәсе ABC яссылыгына перпендикуляр. $MB \perp AC$ икәнен исбатлагыз.
2. $ABCD$ — турыпочмаклык. AE кисемтәсе ABC яссылыгына перпендикуляр. $EB = 15$, $EC = 24$, $ED = 20$. EDC өчпочмагының турыпочмаклы икәнен исбатлагыз һәм AE ны табыгыз.

М—9

α һәм β яссылыклары параллель. M ноктасыннан (α һәм β яссылыклары M ноктасыннан бер якта урнашкан) ике туры үткәрелгән. Беренче туры α һәм β яссылыкларын тиңдәшле рәвештә — A һәм B нокталарында, ә икенчесе C һәм D нокталарында кисеп үтә. $AM = CD$, $MC = 16$, $AB = 25$. M ноктасыннан α яссылыгына кадәр ераклык 12 гә тигез. Яссылыклар арасындагы ераклыкны табыгыз.

М—10

1. $ABCD$ — ягы a га тигез ромб, $\angle A = 60°$, $AM \perp ABC$, $AM = \frac{a}{2}$. M ноктасыннан CD турысына кадәр ераклыкны табыгыз.
2. ABC өчпочмагында $AC = CB = 8$, $\angle ACB = 130°$. M ноктасы ABC өчпочмагының түбәләреннән тигез ераклыкта һәм ул ераклык 12 гә тигез. MA белән ABC яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

М—11

1. Икекырлы почмакның кырларында анын кабыргасыннан 6 см һәм 10 см ераклыкта ике нокта алынган. Бу нокталарның берсе икенче кырыннан 7,5 см ераклыкта икәне билгеле. Икенче ноктадан икекырлы почмакның капма-каршы кырына кадәр ераклыкны табыгыз.
2. $ABCD$ ромбының ягы аша α яссылыгы үткәрелгән. AB ягы бу яссылык белән 30° лы почмак төзи. Ромбның кысынкы почмагы 45° булса, ромб яссылыгы белән α яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

М—12

1. ABC һәм DBC төзек өчпочмаклары яссылыклары үзара перпендикуляр булырлык итеп урнашкан ADC һәм ABC яссылыклары белән төзелгән икекырлы почмакның тангенсын табыгыз.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ турыпочмаклы параллелепипедының $ABCD$ нигезе — квадрат, $AD = 2$, $AC_1 = 2\sqrt{6}$.

1) CC_1 не табыгыз.
2) ACC_1 һәм BB_1D_1 яссылыкларының үзара перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

М—13

1. $ABCA_1B_1C_1$ өчпочмаклы төзек призмасында нигезенең ягы 4 см га тигез. A_1C_1 нең уртасы һәм нигезенең BC ягы аша яссылык үткәрелгән. Ян кабыргасының озынлыгы 2 см булса, кисем мәйданын табыгыз.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ туры параллелепипедында ягы a га тигез ромб нигезе булып хезмәт итә, $\angle BAD = 60°$. AD ягы белән B_1 түбәсе аша нигез яссылыгы белән 45° лы почмак төзүче яссылык үткәрелгән. Ян кабыргасының озынлыгын һәм кисем мәйданын табыгыз.

М—14

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ туры параллелепипедында $AB = 1$, $BC = 7\sqrt{3}$, $\angle ABC = 150°$. AC диагонале һәм B_1 түбәсе аша нигез яссылыгы белән 60° лы почмак төзүче яссылык үткәрелгән. Параллелепипедның ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—15

1. $ABCA_1B_1C_1$ авыш призмасының нигезендә ягы a га тигез төзек өчпочмак ята. Ян кабыргасының озынлыгы b га тигез, $\angle A_1AC = \angle A_1AB$. CC_1B_1B кырының мәйданын табыгыз.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ авыш параллелепипедының ян кабыргасы 10 га, ә ян өслеге мәйданы 420 гә тигез. AA_1 һәм DD_1 кабыргалары арасындагы ераклык AA_1 һәм BB_1 кабыргалары арасындагы ераклыктан 11 гә зуррак. BB_1 һәм DD_1 кабыргалары арасындагы ераклык 19 га тигез. Чиктәш ян кырлар арасындагы почмакларны табыгыз.

М—16

1. Өчпочмаклы төзек пирамиданың ян кырлары нигезгә 60° лы почмак ясап авышкан. Нигезенең түбәсеннән ян кырына кадәр ераклык $3\sqrt{3}$ кә тигез. Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.
2. Дүртпочмаклы төзек пирамидада нигезенең ягы 4 см га, ә нигезенең үзәгеннән ян кабыргага кадәр ераклык 2 см га тигез.
1) Чиктәш ян кырлар арасындагы почмакны;
2) пирамиданың түбәсе янындагы яссы почмакны табыгыз.

М—17

1. Пирамиданың нигезендә нигезләре 2 см һәм 8 см га тигез булган тигезьянлы трапеция ята. Ян кырлары нигезгә 60° лы почмак ясап авышкан. Пирамиданың биеклеген һәм ян өслегенең мәйданын табыгыз.
2. Пирамиданың нигезендә ягы a га һәм почмагы 60° ка тигез ромб ята. Ромбның кысынкы почмагының яклары аша үтүче ян кырлары нигез яссылыгына перпендикуляр, ә калган ике ян кыры нигез яссылыгына 60° лы почмак ясап авышкан. Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—18

1. Дүртпочмаклы төзек пирамидада нигезенең яклары a га тигез, ә ян кырлары нигез яссылыгына $60°$ лы почмак ясап авышкан. Нигезенең үзәге аша, ян кырына параллель итеп, яссылык үткәрелгән. Кисем мәйданын табыгыз.
2. Дүртпочмаклы төзек кисек пирамидада нигезенең яклары 10 см һәм 6 см га, ә диагональ кисеменең мәйданы $8\sqrt{10}$ см^2 га тигез. Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—19

1. $ABCA_1B_1C_1$ призмасы бирелгән, $AB = AC$, $\angle A_1AC = \angle A_1AB$, E һәм F — тиңдәшле рәвештә AC һәм AB кабыргаларының урталары. Башлангычы һәм ахыры призманың түбәләре булган һәм:
1) $\overrightarrow{EF}$ векторы белән бердәй юнәлгән;
2) $\overrightarrow{C_1C}$ векторына капма-каршы юнәлгән;
3) озынлыгы $\overrightarrow{CB_1}$ векторының озынлыгына тигез булган векторларны языгыз.
2. AB һәм CD турылары параллель. Бу турылар аша, EF турысы буйлап кисешерлек итеп, тиңдәшле рәвештә α һәм β яссылыклары үткәрелгән. $\overrightarrow{EF}$ һәм $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ һәм $\overrightarrow{AB}$ векторлары коллинеар булырмы? Коллинеар булсалар, ни өчен?

М—20

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

$$\overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{A_1A}$$

суммасына тигез векторны күрсәтегез.
2. $MABCD$ пирамидасының нигезендә $ABCD$ турыпочмаклыгы ята. $AB = 8$ см, $BC = 15$ см. $|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{MA}|$ ын табыгыз.

М—21

1. $ABCA_1B_1C_1$ өчпочмаклы призмасында BB_1C_1C кырының диагональләре M ноктасында кисешәләр. $\vec{AM}$ векторын $\vec{AC}$, $\vec{BB_1}$ һәм $\vec{BC}$ векторлары аша күрсәтегез.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедының диагональләре O ноктасында кисешәләр. k ның нинди кыйммәте өчен

$$\vec{AB} + \vec{B_1C_1} + \vec{CO} = k\vec{C_1A}$$

бәйләнеше дөрес?

М—22

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында $M \in AD$, өстәвенә $AM : MD = 1 : 3$, ә $P \in DC$, өстәвенә $DP : PC_1 = 2 : 5$. $\vec{MP}$ векторын $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ һәм $\vec{AA_1}$ векторлары буйлап таркатыгыз.
2. Векторлардан файдаланып, тетраэдрда капма-каршы кырларның урталарын тоташтыручы кисемтәләрнең бер ноктада кисешкәнен һәм шул нокта белән урталай бүленгәнен исбатлагыз.

М—23

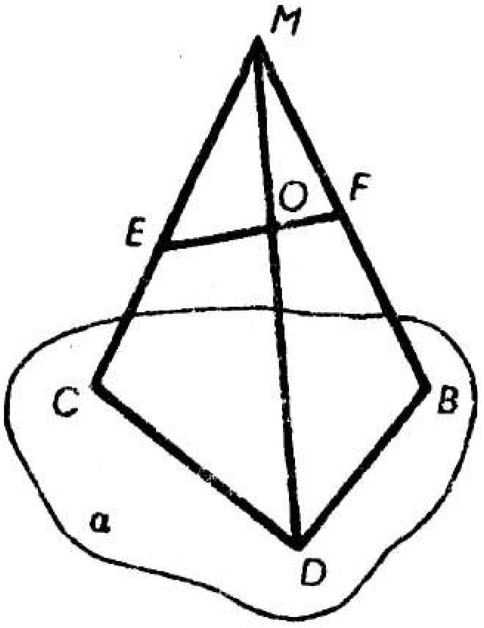
$ABCA_1B_1C_1$ туры призмасында $\angle ABC = 90°$, $\angle CAB = 60°$, $AB = 2$ см, $AA_1 = 2\sqrt{3}$ см.

1) Призманың тулы өслеге мәйданын табыгыз.
2) Призманың A_1BC яссылыгы белән кисеменең мәйданын табыгыз.
3) A_1BC һәм ABC яссылыклары арасындагы почмакны табыгыз.
4) CC_1 турысы белән A_1BC яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.
5) M — ABC өчпочмагы медианаларының кисешү ноктасы булса, $\vec{A_1M}$ векторын $\vec{A_1A}$, $\vec{A_1B}$, $\vec{A_1C}$ векторлары буйлап таркатыгыз.
6) AA_1B_1 һәм A_1BC яссылыклары арасындагы почмакны табыгыз.

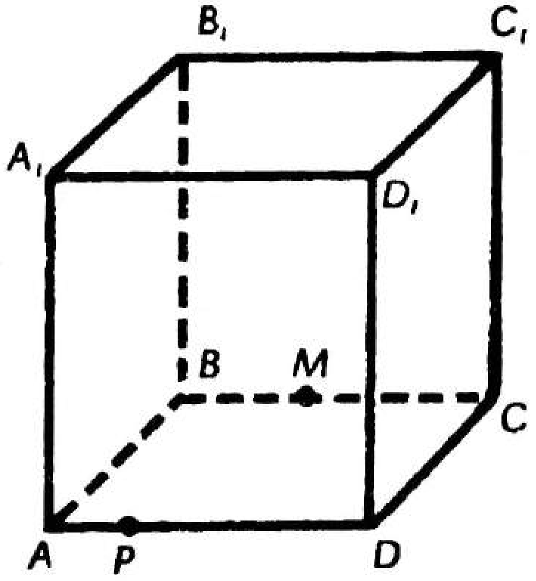
4 НЧЕ ВАРИАНТ

М—1

1. Сызымның ялгышы нәрсәдә (монда $O \in EF$, рәс. 15)? Аңлатып бирегез. Сызымны дөрес итеп сызыгыз.



Рәс. 15

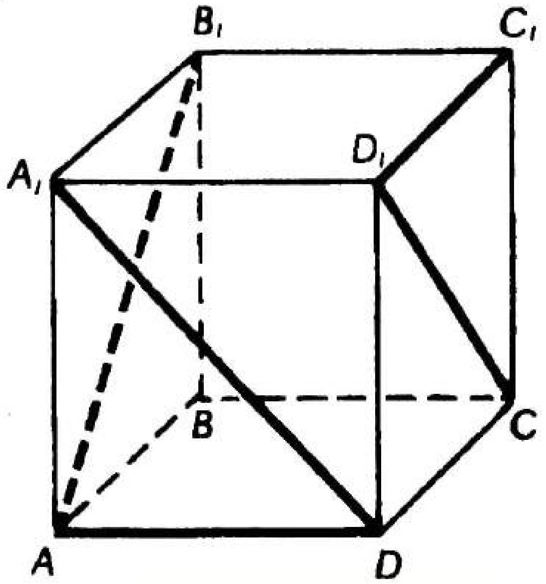


Рәс. 16

2. 16 нчы рәсемдәге бирелгәннәр буенча:
1) PM турысының DCC_1 һәм AA_1B_1 яссылыклары белән кисешү нокталарын;
2) PB_1M һәм AB_1M яссылыкларының кисешү сызыгын;
3) PMC_1 һәм DD_1C_1 яссылыкларының кисешү сызыгын төзегез.

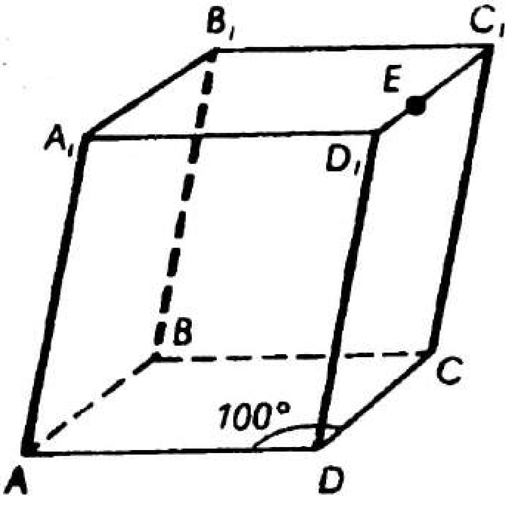
М—2

1. AD һәм C_1D_1, A_1D һәм D_1C, D_1C һәм AB_1 нең чалышма турылар икәнен исбатлагыз.
2. a һәм b параллель турылары һәм бу турыларның берсендә дә ятмаучы M ноктасы бирелгән. M ноктасы аша бирелгән турыларның берсенә генә кисүче туры үткәрергә мөмкин икәне билгеле булса, M ноктасы a һәм b турылары белән бер яссылыкта ятамы?



Рәс. 17

М—3

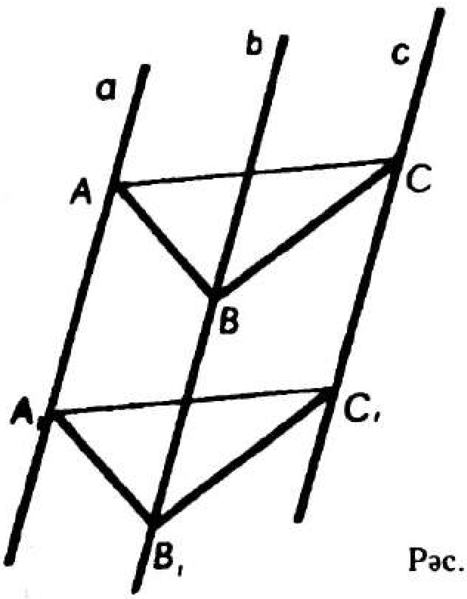


Рәс. 18

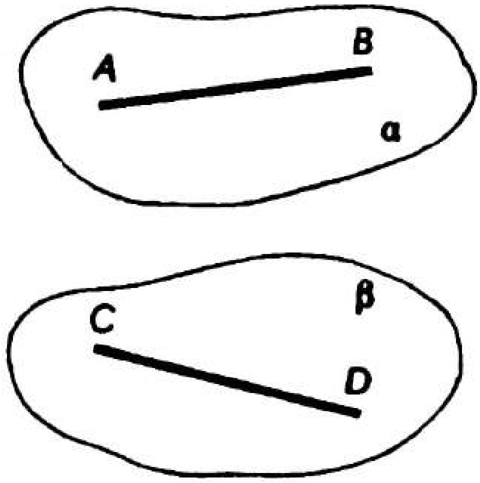
1. $a \| \alpha$, $M \in \alpha$. α яссылыгында M ноктасы аша a турысына параллель үтүче b турысы барлыгын исбатлагыз.
2. 18 нче рәсемдә $ABCD$ — параллелограмм, $\angle ADC = 100°$, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$ һәм $AA_1 \| BB_1 \| CC_1 \| DD_1$.
1) AA_1E яссылыгының $A_1D_1C_1$, DD_1C_1 һәм ABC яссылыклары белән кисешү сызыкларын төзегез.
2) AD һәм D_1C_1 турылары арасындагы почмак нәрсәгә тигез?

М—4

1. 19 нчы рәсемдә $a \| b \| c$ һәм бер яссылыкта ятмыйлар, $AB \| A_1B_1$ һәм $BC \| B_1C_1$. $AC = A_1C_1$ икәнен исбатлагыз.



Рәс. 19



Рәс. 20

2. AB һәм CD кисемтәләре тиңдәшле рәвештә α һәм β параллель яссылыкларында яталар (рәс. 20). AC һәм BD турыларының үзара торышы турында нәрсә әйтергә мөмкин?

М—5

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында P һәм K нокталары — тиңдәшле рәвештә AB һәм BC ның урталары, $A_1C = AC_1$. DD_1 һәм PK турылары арасындагы почмакны табыгыз.
2. $DABC$ тетраэдрында кабырга $DA = 6\sqrt{2}$ см, $AB = AC = 14$ см, $\angle DAB = \angle DAC = 45°$, $BC = 16$ см. BDC кырының мәйданын табыгыз.

М—6

1. $DABC$ тетраэдрында P ноктасы — AD ның уртасы, $E \in DB$, өстәвенә $DE : EB = 1 : 3$. Тетраэдрның P һәм E нокталары аша AC га параллель үтүче яссылык белән кисемен төзегез һәм тетраэдрның барлык кабыргалары да a га тигез булса, кисем мәйданын табыгыз.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында $M \in D_1C_1$, $P \in DD_1$ һәм $K \in BC$. Параллелепипедның M, P һәм K нокталары аша үтүче яссылык белән кисемен төзегез.

М—7

1. AB кисемтәсе α яссылыгын кисеп үтә, $AC \perp \alpha$ һәм $BD \perp \alpha$, $AC = 14$, $BD = 10$, E ноктасы — AB кисемтәсенең уртасы, $EE_1 \perp \alpha$. EE_1 не табыгыз.
2. $a \perp \alpha$, $b \perp a$ ($b \not\in \alpha$). b турысы аша α яссылыгын c турысы буйлап кисүче β яссылыгы үткәрелгән. b һәм c турылары үзара ничек урнашкан?

М—8

1. ABC — тигезьянлы өчпочмак, $AB = AC$, D ноктасы — BC ның уртасы, ED турысы ABC яссылыгына перпендикуляр. $AE \perp BC$ икәнен исбатлагыз.
2. A ноктасы әйләнәдә ята, AK — әйләнә яткан яссылыкка перпендикуляр, $AK = 1$ см, AB — диаметр, BC — әйләнәнең хордасы (AB белән 45°лы почмак төзи). Әйләнәнең радиусы 2 см га тигез. KCB ның турыпочмаклы өчпочмак икәнен исбатлагыз һәм KC ны табыгыз.

М—9

M ноктасы α һәм β параллель яссылыклары арасында урнашкан. M ноктасы аша ике туры үткәрелгән. Беренче туры α яссылыгын — A ноктасында, ә β яссылыгын B ноктасында кисеп үтә. Икенчесе бу яссылыкларны тиңдәшле рәвештә C һәм D нокталарында кисә. $MA = MD$, $MC = 32$, $MB = 50$. M ноктасыннан α яссылыгына кадәр ераклык 24 кә тигез. Яссылыклар арасындагы ераклыкны табыгыз.

М—10

1. ABC өчпочмагында $AC = BC = m$, $\angle ACB = 120°$, $PA \perp ABC$. P ноктасы BC турысыннан m ераклыкта ята. P ноктасыннан ABC яссылыгына кадәр ераклыкны табыгыз.
2. ABC — турыпочмаклы өчпочмак ($\angle C = 90°$), $\angle A = 20°$, $AC = 15$. M ноктасы өчпочмакның һәр түбәсеннән 25 кә тигез ераклыкта ята. MC белән ABC яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

М—11

1. Ике нокта икекырлы почмакның кырында ята һәм икенче кырыннан тиңдәшле рәвештә 48 см һәм 60 см ераклыкта тора. Бу нокталарның берсе икекырлы почмакның кабыргасыннан 50 см га читтәрәк. Икенче ноктадан икекырлы почмакның кабыргасына кадәр ераклыкны табыгыз.
2. ACB тигезьянлы турыпочмаклы өчпочмагының C туры почмагы түбәсе аша гипотенузасына параллель һәм катеты белән $30°$ лы почмак төзүче α яссылыгы үткәрелгән. ABC һәм α яссылыклары арасындагы почмакны табыгыз.

М—12

1. ABC төзек өчпочмагының ягы 4 кә тигез. DBC өчпочмагы тигезьянлы ($DB = DC$). Аларның яссылыклары үзара перпендикуляр. ADC яссылыгы ABC яссылыгы белән $60°$ лы почмак төзи. DBC өчпочмагының мәйданын табыгыз.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ турыпочмаклы параллелепипедының DD_1C_1C ян кыры — квадрат, $DC = 3$, $BD_1 = \sqrt{22}$.

1) BC ны табыгыз.
2) BCD_1 һәм DC_1B_1 яссылыкларының үзара перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

М—13

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дүртпочмаклы төзек призмасында нигезенең яклары a га, ә ян кабыргасы $\frac{a\sqrt{14}}{4}$ кә тигез. Нигезенең BD диагонале һәм D_1C_1 нең уртасы аша яссылык үткәрелгән. Кисем мәйданын табыгыз.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ туры параллелепипедының нигезе булып ягы m га тигез ромб хезмәт итә, $\angle ADC = 135°$. DC ягы һәм A_1 түбәсе аша, нигез яссылыгына $60°$ лы почмак ясап, яссылык үткәрелгән. Ян кабыргасының озынлыгын һәм кисем мәйданын табыгыз.

М—14

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ туры параллелепипедында $BC = 7$, $CD = 15$, $\angle BCD = 60°$. BD диагонале һәм C_1 түбәсе аша, нигез яссылыгына $45°$ лы почмак ясап, яссылык үткәрелгән. Ян өслегенең мәйданын табыгыз.

М—15

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ авыш параллелепипедының нигезендә ягы a га тигез квадрат ята, $AA_1 = b$, $\angle A_1AD = \angle A_1AB$. BB_1D_1D диагональ кисеменең мәйданын табыгыз.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ авыш параллелепипедының ян кабыргасы 10 га, ә ян өслеге мәйданы 880 гә тигез. DD_1 кабыргасыннан CC_1 һәм AA_1 кабыргаларына кадәр ераклыклар $7 : 15$ кә чагыштырмасында. AA_1 һәм CC_1 кабыргалары арасындагы ераклык 26 га тигез. Параллелепипедның чиктәш ян кырлары арасындагы почмакларын табыгыз.

М—16

1. Дүртпочмаклы төзек пирамиданың ян кырлары нигезенә $60°$ лы почмак ясап авышкан, ә нигез ягының уртасыннан каршы яткан ян кырына кадәр ераклык $4\sqrt{3}$ кә тигез. Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.
2. Өчпочмаклы төзек пирамидада нигезенең биеклеге $2\sqrt{3}$ см, ә нигез ягының уртасыннан каршы яткан ян кабыргага кадәр ераклык 3 см.

1) Ян кырлар арасындагы почмакны;
2) пирамиданың түбәсе янындагы яссы почмагын табыгыз.

М—17

1. Пирамиданың нигезендә ягы a га, кысынкы почмагы 60° ка тигез булган ромб ята. Ян кырлары нигез яссылыгына 45° лы почмак ясап авышкан. Пирамиданың биеклеген һәм ян өслеге мәйданын табыгыз.
2. $DABC$ пирамидасының нигезендә ABC тигезьянлы өчпочмагы ята, $AC = CB = a$, $\angle ACB = 120°$. DAC һәм DAB кырлары нигез яссылыгына перпендикуляр, ә DBC кыры аның белән 45° лы почмак төзи. Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—18

1. Дүртпочмаклы төзек пирамидада нигезенең ягы a га тигез, ә ян кырлары нигез яссылыгына 60° лы почмак ясап авышкан. Нигезенең ягы аша, каршы яткан кырга перпендикуляр итеп, яссылык үткәрелгән. Кисем мәйданын табыгыз.
2. Өчпочмаклы төзек кисек пирамидада нигезенең яклары $8\sqrt{3}$ см һәм $6\sqrt{3}$ см. Ян кабыргасы һәм өске нигезенең каршы яткан ягының уртасы аша яссылык үткәрелгән. Кисем мәйданы $\frac{21\sqrt{3}}{2}$ см² га тигез. Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—19

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеды бирелгән, $ABCD$ — ромб, $\angle A_1AD = \angle A_1AB$, E һәм F нокталары — тиңдәшле рәвештә A_1B_1 һәм A_1D_1 кабыргаларының урталары. Башлангычы һәм ахыры параллелепипедның түбәләрендә булган һәм
1) $\overrightarrow{EF}$ векторы белән бердәй юнәлешле;
2) $\overrightarrow{DC_1}$ векторына капма-каршы юнәлешле;
3) озынлыгы $\overrightarrow{B_1D}$ векторының озынлыгына тигез булган векторларны языгыз.
2. α һәм β яссылыклары γ яссылыгына перпендикуляр һәм AB турысы буйлап кисешәләр. Бу яссылыкныкы булмаган CD турысы шулай ук γ яссылыгына перпендикуляр. $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{CD}$ векторлары коллинеар булырмы? Коллинеар булса, ни өчен?

М—20

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$$

суммасына тигез векторны күрсәтегез.

2. $ABCA_1B_1C_1$ өчпочмаклы призмасының нигезендә ягы $2\sqrt{3}$ см га тигез булган ABC төзек өчпочмагы ята, O — AB ның уртасы. $|\overrightarrow{A_1A} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{A_1C}|$ ны табыгыз.

М—21

1. $MABC$ тетраэдрында CE — BMC кырының медианасы, K ноктасы — CE ның уртасы. $\overrightarrow{AK}$ векторын $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$ һәм $\overrightarrow{BM}$ векторлары аша күрсәтегез.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедынын диагональләре O ноктасында кисешәләр.

$$k\,(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AO}) = \overrightarrow{A_1C}$$

бәйләнеше k ның нинди кыйммәте өчен дөрес?

М—22

1. $DABC$ тетраэдрында O — ABC өчпочмагы медианаларының кисешү ноктасы, $F \in AD$, өстәвенә $AF : FD = 3 : 1$. $\overrightarrow{OF}$ векторын $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$ векторлары буйлап таркатыгыз.
2. Параллелепипедның диагональләре бер ноктада кисешкәнен һәм кисешү ноктасы белән урталай бүленгәнен векторлардан файдаланып исбатлагыз.

М—23

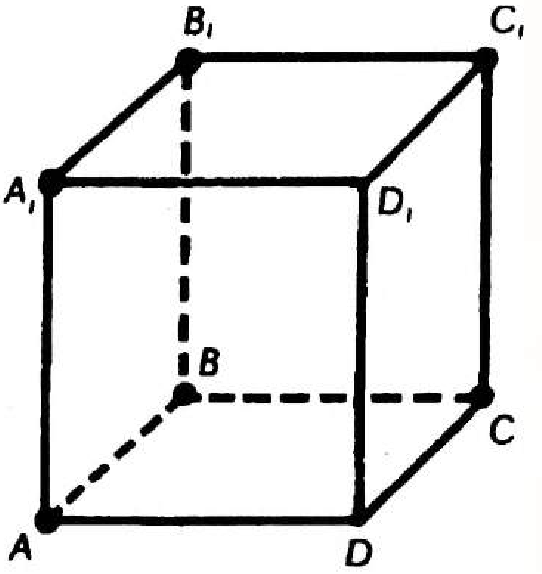
$DABC$ пирамидасын AD кабыргасы нигезгә перпендикуляр, $AD = 4\sqrt{3}$ см, $AB = 2$ см, $\angle ABC = 90°$, $\angle BAC = 60°$, M — DA кисемтәсенең уртасы.

1) Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.
2) Пирамиданың BMC яссылыгы белән киseme мәйданын табыгыз.
3) MBC һәм ABC яссылыклары арасындагы почмакны табыгыз.
4) BD турысының BMC яссылыгы белән төзегән почмакны табыгыз.
5) O — ABC өчпочмагы медианаларының кисешү ноктасы булса, $\overrightarrow{DO}$ векторын $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ векторлары буйлап таркатыгыз.
6) MBC һәм ABD яссылыклары арасындагы почмакны табыгыз.

5 НЧЕ ВАРИАНТ

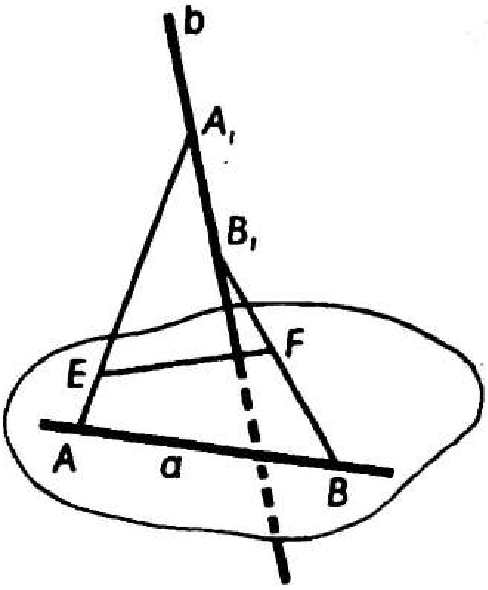
М—1

1. $ABCD$ трапециясендә (AD һәм BC — нигезләре) AB ягы CD ны M ноктасында кисә, E — AD ның уртасы; $O \in BC$. K ноктасы трапеция яссылыгыннан читтә ята. Нинди шарт үтәлгәндә K, M, O һәм E нокталары бер яссылыкта ята?
2. AB_1C һәм A_1C_1B яссылыкларының кисешү сызыгын төзегез (рәс. 21).

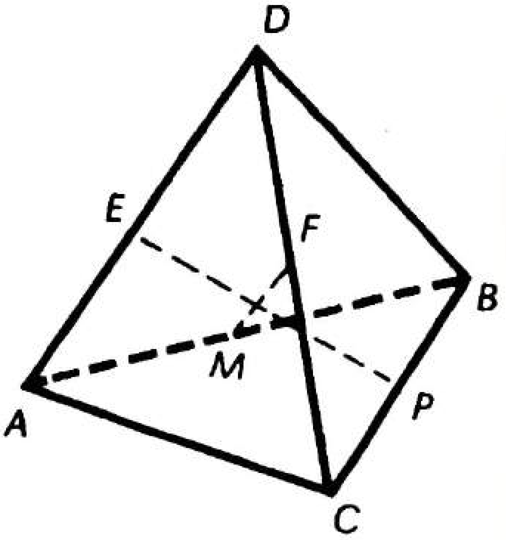


Рәс. 21

М—2



Рәс. 22



Рәс. 23

1. 22 нче рәсемдә a һәм b — чалышма турылар. EF һәм a, EF һәм b турыларының үзара торышлары нинди?
2. 23 нче рәсемдә E, F, P һәм M нокталары — тиңдәшле рәвештә AD, CD, BC һәм AB кисемтәләренең урталары. EP белән MF ның кисешкәнен һәм кисешү ноктасы белән урталай бүленгәнен исбатлагыз.

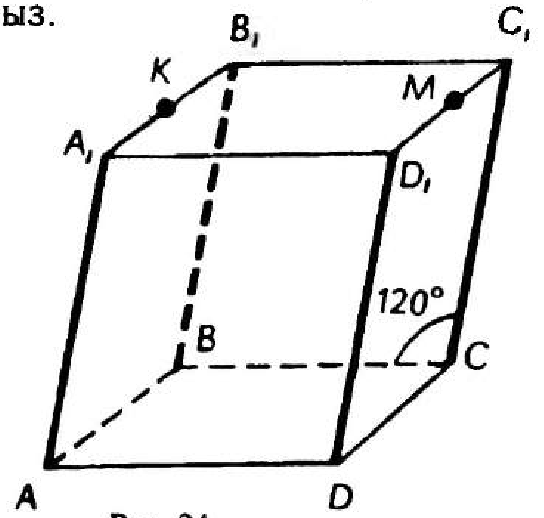
М—3

1. ABC һәм DBC өчпочмаклары бер яссылыкта ятмый. M, H һәм K нокталары — тиңдәшле рәвештә BD, CD һәм AC кисемтәләренең урталары. MKH яссылыгы AB кисемтәсен P ноктасында кисә. PH һәм MK кисемтәләренең кисешкәнен һәм кисешү ноктасы белән урталай бүленгәнен исбатлагыз.
2. 24 нче рәсемдә $ABCD$ — параллелограмм, $\angle BCC_1=120°$, $AA_1=BB_1=CC_1=DD_1$ һәм $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$.

1) AA_1 турысы һәм M ноктасы, DD_1 турысы һәм K ноктасы аша үтүче яссылыкларның кисешү сызыгы OO_1 не төзегез.

2) OO_1 һәм AA_1 турыларының үзара торышы нинди?

3) OO_1 һәм AD турылары арасындагы почмак нәрсәгә тигез?



Рәс. 24

М—4

1. Өч яссылык параллель l_1 һәм l_2 чалышма турылары бу яссылыкларны A_1, A_2, A_3 һәм B_1, B_2, B_3 нокталарында кисеп үтә. $B_1B_2 = 5$ см, $A_2A_3 = 6$ см, $A_1A_2 : B_2B_3 = 8 : 15$. A_1A_3 һәм B_1B_3 кисемтәләренең озынлыкларын табыгыз.
2. p һәм q кисешүче турылары α яссылыгында ята, $A \notin \alpha$, $AB \parallel p$, $AC \parallel q$, $A \in \beta$, $C \in \beta$. α һәм β яссылыклары үзара ничек урнашкан?

М—5

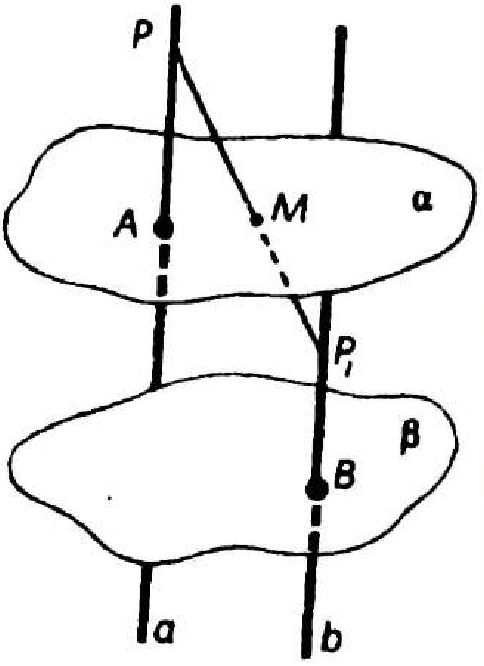
1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында $E \in B_1C_1$, $F \in AD$ өстәвенә $B_1E : EC_1 = FD : AF = 5 : 2$. E һәм F нокталары параллелепипед диагональләренең кисешү ноктасына карата симметрик икәнен исбатлагыз.
2. Тетраэдрда кабыргаларының квадратлары суммасы капма-каршы кабыргаларының урталарын тоташтыручы кисемтәләрнең квадратлары суммасыннан дүрт тапкыр зуррак икәнен исбатлагыз.

М—6

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедының барлык кырлары — ягы 8 см га тигез булган квадратлар (куб). P, M һәм T нокталары A_1B_1, C_1C һәм AD кабыргаларының урталарына туры килә. Параллелепипедның P, M һәм T нокталары аша үтүче яссылык белән кисемен төзегез һәм кисемнең мәйданын табыгыз.
2. $DABC$ — тетраэдр, $P \in AB$, DE — CDB кырының медианасы. Тетраэдрның C һәм P нокталары аша үтүче һәм DE га параллель яссылык белән кисемен төзегез.

М—7

1. ABC өчпочмагының A түбәсе аша, BC га параллель итеп, α яссылыгы үткәрелгән, $BB_1 \perp \alpha$ һәм $CC_1 \perp \alpha$, $CC_1 = 4$. $AC_1 = \sqrt{209}$, $AB_1 = \sqrt{33}$, $\angle BAC = 60°$. BC ны табыгыз.
2. α һәм β яссылыклары параллель, $a \perp \alpha$ һәм α яссылыгын A ноктасында кисеп үтә, $b \perp \beta$ һәм β яссылыгын B ноктасында кисеп үтә, PP_1 исә α яссылыгын M ноктасында кисеп үтә. a турысының β яссылыгы белән һәм b турысының α яссылыгы белән кисешү ноктасын төзегез. Төзүне нигезләгез (рәс. 25).



Рәс. 25

М—8

1. $DABC$ тетраэдрында $AB = BC$, $\angle DBC = \angle DBA$. $AC \perp DB$ икәнен исбатлагыз.
2. $DABC$ — барлык кабыргалары a га тигез булган тетраэдр, E ноктасы — BC ның уртасы. Тетраэдрның E ноктасы аша үтүче һәм DB га перпендикуляр яссылык белән кисемен төзегез һәм кисем мәйданын табыгыз.

М—9

$ABCD$ параллелограммының A һәм D түбәләре α яссылыгында, ә калган икесе бу яссылыктан читтә ята. $AB = 15$ см, $BC = 19$ см. Параллелограмм диагональләренең α яссылыгына проекцияләре 20 см һәм 22 см га тигез. BC ягыннан α яссылыгына кадәр ераклыкны табыгыз.

М—10

1. M ноктасы тигезьянлы трапециянең һәр ягыннан 12 см ераклыкта ята. Трапециянең нигезләре 18 см һәм 32 см. M ноктасыннан трапеция яссылыгына кадәр ераклыкны табыгыз.
2. $ABCD$ турыпочмаклыгының A түбәсеннән турыпочмаклык яссылыгына аның AD һәм AB яклары белән $50°$ лы почмак төзүче AM авышмасы үткәрелгән. Бу авышма белән турыпочмаклык яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

М—11

1. $AB = 25$ см кисемтәсенең очлары $60°$ ка тигез булган икекырлы почмакның кырларында ята. A һәм B ноктaларыннан икекырлы почмакның кабыргасына AC һәм BD перпендикулярлары төшерелгән, $AC = 5$ см, $BD = 8$ см. CD ны табыгыз.
2. $ABCD$ — квадрат, O — диагональләренең кисешү ноктасы, $OM \perp ABC$, $OM = 3$. Квадратның ягы $4\sqrt{2}$ гә тигез. BMC һәм DMC яссылыклары арасындагы почмакны табыгыз.

М—12

1. $ABCD$ турыпочмаклыгында $AB = 3$, $AD = 4$. Бу турыпочмаклык, туры икекырлы почмак барлыкка килерлек итеп, диагонале буйлап бөкләнгән. B һәм D түбәләре арасындагы ераклыкны табыгыз.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ турыпочмаклы параллелепипедында $AB = 4$, $AB_1 = 15$, $B_1D = \sqrt{305}$. AB һәм B_1D арасындагы ераклыкны табыгыз һәм рәсемдә әлеге чалышма турыларның уртак перпендикулярын төзегез.

М—13

1. $ABCA_1B_1C_1$ өчпочмаклы төзек призмасының барлык кабыргалары да $2\sqrt{3}$ кә тигез. Нигезенең ягы аша, аның яссылыгына 60° лы почмак ясап, яссылык үткәрелгән. Кисем мәйданын табыгыз.
2. Алтыпочмаклы төзек призманың ян кырының мәйданы Q га тигез. Нигезенең кечерәк диагоналенә перпендикуляр һәм шул диагональне урталай бүлүче кисем мәйданын табыгыз.

М—14

$ABCA_1B_1C_1$ туры призмасында $AB = 13$, $BC = 21$, $AC = 20$. Ян кырының A_1C диагонале CC_1B_1B кыры яссылыгы белән 30° лы почмак төзи. Призманың тулы өслеге мәйданын табыгыз.

М—15

1. $ABCA_1B_1C_1$ өчпочмаклы авыш призмасының барлык кабыргалары да үзара тигез. AA_1 кабыргасы нигез яссылыгы белән 60° лы почмак төзи, $\angle A_1AC = \angle A_1AB < 90°$. CC_1B_1B кырының мәйданы Q га тигез. Призманың ян өслеге мәйданын табыгыз.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ авыш параллелепипедында AA_1 кабыргасыннан DD_1 кабыргасына кадәр ераклык 10 га, ә AA_1 дән BB_1 гә кадәр ераклык 17 гә тигез. BB_1D_1D диагональ кисеменең мәйданы 210 га тигез. AA_1 кабыргасы белән B_1D диагонале арасындагы ераклык 8 гә тигез. Параллелепипедның ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—16

1. Дүртпочмаклы төзек пирамидада нигезенең ягы a га тигез, чиктәш ян кырлары арасындагы почмагы 120°. Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.
2. n-почмаклы төзек пирамиданың ян кырлары нигезгә φ почмагы ясап авышкан. Пирамиданың түбә янындагы яссы почмагын табыгыз һәм, $\varphi = 40°$, $n = 10$ булганда, аны исәпләп чыгарыгыз.

М—17

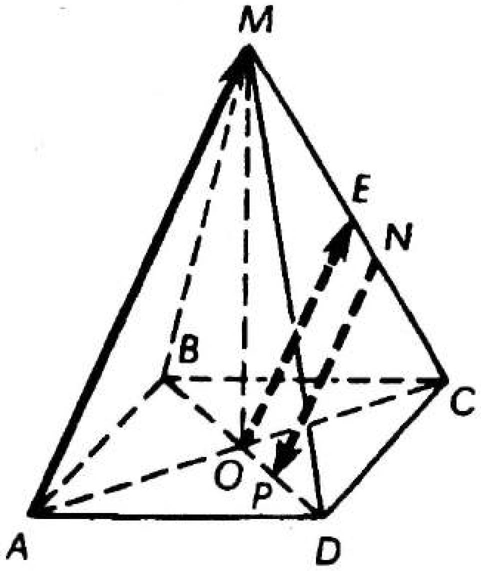
1. $MABC$ пирамидасының нигезендә $AB = BC$, $AC = b$ һәм $\angle A = \alpha$ булган ABC өчпочмагы ята. Ян кырлары нигез яссылыгына φ почмагы ясап авышкан. Пирамиданың биеклеген һәм ян өслеге мәйданын табыгыз.
2. $MABC$ пирамидасының нигезендә $AB = AC = 50$, $BC = 80$ булган ABC өчпочмагы ята, $\angle MAC = \angle MAB < 90°$. MBC һәм ABC яссылыклары үзара перпендикуляр. Пирамида биеклегенең нигезе AMC кырыннан $12\sqrt{3}$ кә тигез ераклыкта. Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—18

1. $MABCD$ дүртпочмаклы төзек пирамидасында AB һәм AD якларының урталары аша, AM ян кабыргасына параллель итеп, яссылык үткәрелгән. Нигезенең ягы a га, ян кабыргасы b га тигез булса, кисем мәйданын табыгыз.
2. Өчпочмаклы төзек кисек пирамидада нигезләренең яклары $8\sqrt{3}$ һәм $6\sqrt{3}$ кә тигез. Өске нигезенен түбәсе аша, нигез яссылыгына перпендикуляр һәм нигезенең каршы яткан ягына параллель итеп, яссылык үткәрелгән. Кисем мәйданы $4\sqrt{2}$ гә тигез. Әлеге кисек пирамида бер кисәге булган тулы пирамиданың ян өслеге мәйданын һәм биеклеген табыгыз.

М—19

1. $DABC$ өчпочмаклы төзек пирамидасында E, M, T һәм K нокталары — тиңдәшле рәвештә DC, DB, BA һәм AC кабыргаларының урталары.
   1) Башлангычы һәм ахыры E, M, T һәм K нокталарында булган һәм бер туры өстендә ятмаган капма-каршы юнәлгән векторларның парларын санап чыгыгыз.
   2) Башлангычы һәм ахыры E, M, T һәм K нокталарында булган тигез векторларның парларын санап чыгыгыз.
   3) Ахыры E, M, T һәм K нокталарында булган тигез озынлыктагы векторларны санап чыгыгыз.
   4) 26 нчы рәсемдә $MABCD$ — төзек пирамида, $ME = EC$. Рәсемдә күрсәтелгән векторларның кайсылары коллинеар? Ни өчен?



Рәс. 26

М—20

1. $EABCDF$ — кабыргасы a га тигез төзек октаэдр.

$$|\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{FA}|$$

ын табыгыз.

2. ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмаклары пространствода ирекле рәвештә урнашкан.

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CA_1}$$

икәнен исбатлагыз.

М—21

1. M ноктасы ABC төзек өчпочмагы яссылыгыннан читтә, аның түбәләреннән тигез ераклыкта ята, MO — M ноктасыннан өчпочмак яссылыгына төшерелгән перпендикуляр. $\overrightarrow{MO}$ векторын $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BC}$ һәм $\overrightarrow{CA}$ векторлары аша күрсәтегез.
2. $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары нуль-вектор түгел һәм коллинеар да түгел. $3\vec{a} + 5\vec{b} = m\vec{a} + (2n+1)\vec{b}$ булса, m һәм n ны табыгыз.

М—22

1. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ алтыпочмаклы төзек призмасында $ABCDEF$ нигезе ягының озынлыгы a га тигез. AA_1B_1B ян кырының AB_1 диагонале нигезнең AB ягына φ почмагы ясап авышкан. $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ һәм $\vec{e}_3$ тиңдәшле рәвештә $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}$ һәм $\overrightarrow{AA_1}$ векторлары белән бердәй юнәлештәге берәмлек векторлар булсын. $\overrightarrow{AD_1}$ векторын $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ һәм $\vec{e}_3$ векторлары буйлап таркатыгыз.
2. Өчпочмаклы авыш призмада, нигезенә параллель итеп, өч ян кабыргасын кисүче яссылык үткәрелгән. Нигез һәм кисем медианаларының кисешү нокталары бер турыда ятканын исбатлагыз.

М—23

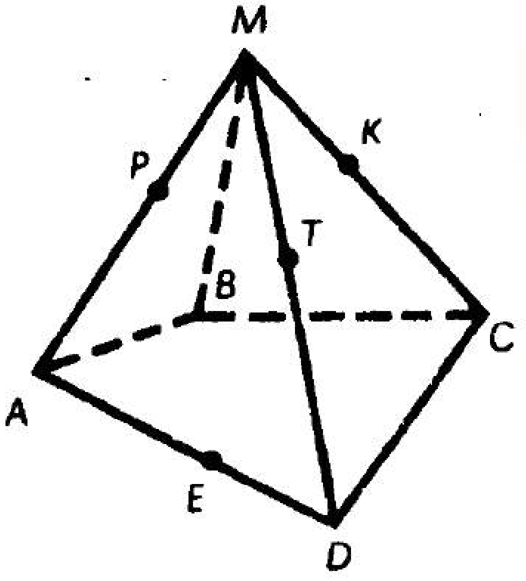
$ABCA_1B_1C_1$ туры призмасында $AC = 13$ см, $AB = 14$ см, $BC = 15$ см, $AA_1 = 10$ см. M һәм H нокталары — тиңдәшле рәвештә AA_1 һәм BB_1 кабыргаларының урталары.

1) Призманың тулы өслеге мәйданын табыгыз.
2) Призманың MHC яссылыгы белән кисеменең мәйданын табыгыз.
3) MHC һәм ABC яссылыклары арасындагы почмакны табыгыз.
4) AA_1 турысы белән MHC яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.
5) K ноктасы CH кисемтәсенең уртасы булса, $\overrightarrow{MK}$ векторын $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AC}$ һәм $\overrightarrow{AB}$ векторлары буйлап таркатыгыз.
6) MHC һәм ABC яссылыкларының кисешү сызыгын төзегез.

6 НЧЫ ВАРИАНТ

М—1

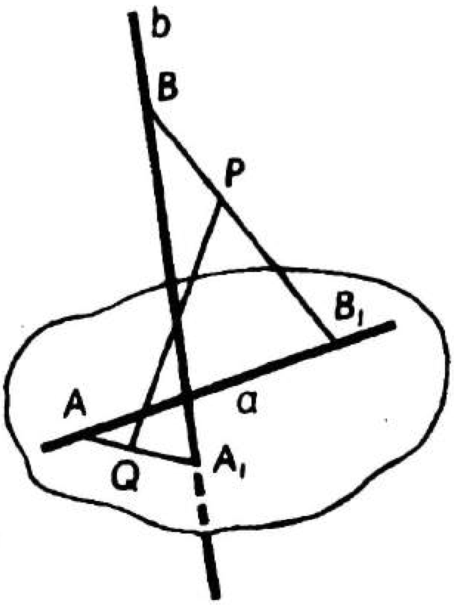
1. ABC өчпочмагында A һәм C почмакларының биссектрисалары O ноктасында кисешәләр, $AB : BC = 2 : 3$; $E \in AC$, D ноктасы ABC яссылыгыннан читтә ята. Нинди шарт үтәлгәндә D, B, O һәм E нокталары аша яссылык үткәреп була?
2. PKT һәм MCE яссылыкларының кисешү сызыгын төзегез (рәс. 27).



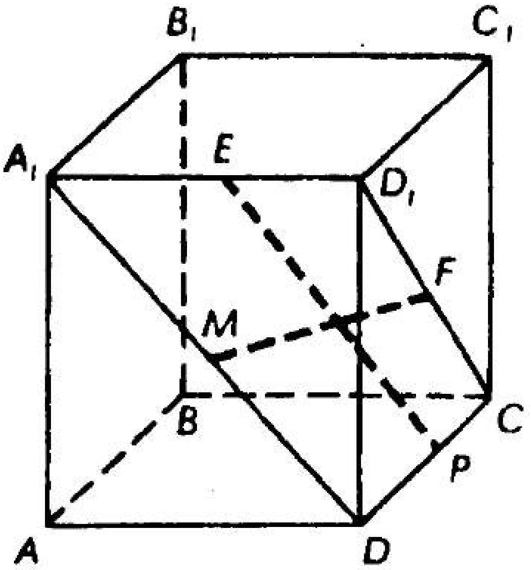
Рәс. 27

М—2

1. 28 нче рәсемдә a һәм b — чалышма турылар. PQ һәм a, PQ һәм b турыларының үзара торышы нинди?



Рәс. 28

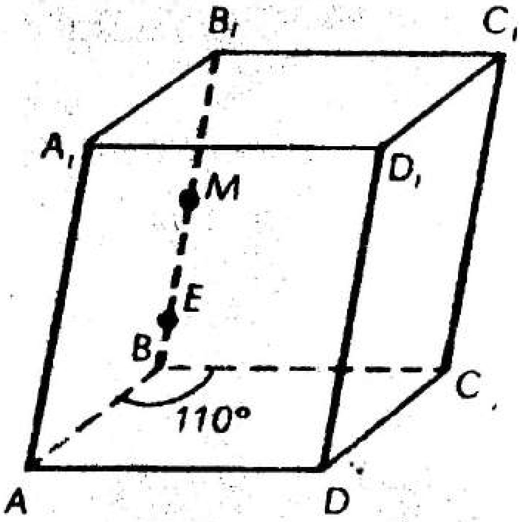


Рәс. 29

2. 29 нчы рәсемдә E, F, P һәм M — тиңдәшле рәвештә A_1D_1, D_1C, CD һәм A_1D ның урталары. EP белән MF ның кисешкәнен һәм кисешү ноктасы белән урталай бүленгәнен исбатлагыз.

М—3

1. APD өчпочмагы белән $ABCD$ трапециясе AD уртак ягына ия һәм төрле яссылыкларда яталар. Трапециянең BC нигезе һәм PD кисемтәсенең уртасы булган K ноктасы аша AP турысын M ноктасында кисүче яссылык үткәрелгән, $AD = 2BC$. MC һәм BK кисемтәләренең кисешкәнен һәм кисешү ноктасы белән урталай бүленгәнен исбатлагыз.



Рәс. 30

2. 30 нчы рәсемдә $ABCD$ — параллелограмм, $\angle ABC = 110°$ $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$ һәм $AA_1 \| BB_1 \| CC_1 \| DD_1$.

1) AD турысы белән M ноктасы һәм A_1D_1 турысы белән E ноктасы аша үтүче яссылыкларның кисешү сызыгы KK_1 не төзегез.

2) KK_1 һәм BC турылары үзара ничек урнашкан?

3) KK_1 һәм DC турылары арасындагы почмак күпмегә тигез?

М—4

1. Өч яссылык үзара параллель. l_1 һәм l_2 чалышма турылары бу яссылыкларны тиңдәшле рәвештә A_1, A_2, A_3 һәм B_1, B_2, B_3 нокталарында кисеп үтәләр: $A_1A_2 = 4$ см, $B_2B_3 = 9$ см, $A_2A_3 = B_1B_2$. A_1A_3 һәм B_1B_3 кисемтәләренең озынлыгын табыгыз.
2. Бирелгән: $a \| \alpha$, $a \| \beta$, $b \| \alpha$, $b \| \beta$. α һәм β яссылыклары параллель булсын өчен, бирелгән турыларның үзара торышы нинди булырга тиеш?

М—5

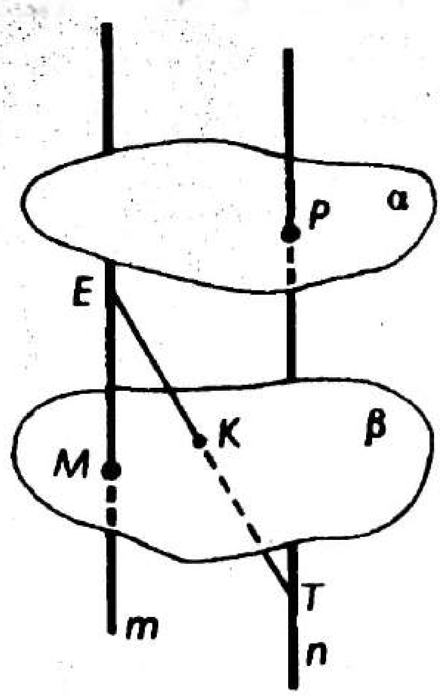
1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында $K \in A_1B_1$ һәм $P \in DC$, өстәвенә $A_1K : KB_1 + CP : PD = 3 : 1$. K һәм P нокталары параллелепипед диагональләренең кисешү ноктасына карата симметрик икәнен исбатлагыз.
2. Тетраэдрның түбәләре һәм каршы яткан кырларының медианаларының кисешү нокталары аша үтүче турыларның бер ноктада кисешкәнен исбатлагыз.

М—6

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедының барлык кырлары да — ягы 4 см га тигез квадратлар (куб). $ABCD$ һәм $A_1B_1C_1D_1$ нигезләреңең диагональләре тиңдәшле рәвештә O һәм O_1 нокталарында кисешәләр. P — AD ның уртасы, ә T — CD ның уртасы. Параллелепипедның P, T нокталары һәм OO_1 кисемтәсенең уртасы аша үтүче яссылык белән кисемен төзегез һәм кисем мәйданын табыгыз.
2. $DABC$ тетраэдрында $P \in AB$, CE — DCB кырының медианасы. Тетраэдрның D һәм P нокталары аша үтүче һәм CE га параллель яссылык белән кисемен төзегез.

М—7

1. EFM өчпочмагының E түбәсе аша, FM га параллель итеп, α яссылыгы үткәрелгән, $MM_1 \perp \alpha$, $MM_1 = 12$ см, P — өчпочмак медианаларының кисешү ноктасы, $PP_1 \perp \alpha$. PP_1 не табыгыз.
2. α һәм β яссылыклары параллель, $m \perp \beta$ һәм $n \perp \alpha$. n турысы α яссылыгын — P ноктасында, ә m турысы β яссылыгын M ноктасында кисеп үтә. ET турысы β яссылыгын K ноктасында кисеп үтә. m турысының α яссылыгы белән, n турысының β яссылыгы белән кисешү ноктасын төзегез. Төзүне нигезләгез (рәс. 31).



Рәс. 31

М—8

1. $DABC$ тетраэдрында $\angle DAC = \angle DAB$ һәм $\angle ADC = \angle ADB$. $BC \perp AD$ икәнен исбатлагыз.
2. $DABC$ тетраэдрында DB кабыргасы ABC яссылыгына перпендикуляр. $\angle ACB = 90°$, $BC = BD$, F ноктасы — AD ның уртасы. Тетраэдрның F ноктасы аша үтүче һәм CD га перпендикуляр яссылык белән кисемен төзегез.

М—9

Трапециянең бер нигезе икенчесеннән ике тапкыр озынрак. Трапециянең урта сызыгы α яссылыгына параллель һәм аннан 13 см ераклыкта, трапециянең диагональләренең кисешү ноктасы яссылыктан 15 см ераклыкта. Трапециянең нигезләреннән α яссылыгына кадәр ераклыкны табыгыз.

М—10

1. Турыпочмаклы трапециянең урта сызыгы 6 га тигез. Кысынкы почмагы 30°. M ноктасы трапеция яссылыгыннан $2\sqrt{3}$ кә тигез ераклыкта һәм аның якларыннан тигез ераклыкта тора. M ноктасыннан трапециянең якларына кадәр ераклыкларны табыгыз.
2. $ABCD$ турыпочмаклыгының A түбәсеннән турыпочмаклык яссылыгы белән 40° лы почмак төзүче AM турысы үткәрелгән. $\angle MAD = \angle MAB$. Бу почмакларны табыгыз.

М—11

1. $AB = 16$ см кисемтәсенең очлары 120° ка тигез булган икекырлы почмакның кырларында ята. A һәм B нокталарыннан икекырлы почмакның кабыргасына AC һәм BD перпендикулярлары төшерелгән. $AC = 7$ см һәм $BD = 11$ см булса, CD ны табыгыз.
2. ABC — төзек өчпочмак, O — AC ның уртасы, $OD \perp ABC$, $OD = 3$. Өчпочмакның ягы $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ кә тигез. ABD һәм CBD яссылыклары арасындагы почмакны табыгыз.

М—12

1. $ABCD$ параллелограммында $AB = 4$, $AC = 5$, $\angle BAC = 60°$. Бу параллелограмм AC диагонале буйлап туры икекырлы почмак барлыкка килерлек итеп бөкләнгән. B һәм D түбәләре арасындагы ераклыкны табыгыз.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ турыпочмаклы параллелепипедында $ABCD$ — ягы 5 см га тигез квадрат. BC белән AC_1 арасындагы ераклык 4 см. AC_1 не табыгыз һәм рәсемдә бу чалышма турыларга уртак перпендикулярны төзегез.

М—13

1. Дүртпочмаклы төзек призмада нигезенең ягы 8 см га, ә ян кабыргасы $3\sqrt{2}$ см га тигез. Нигезенең диагонале аша, аның яссылыгына 45° лы почмак ясап, кисем үткәрелгән. Аның мәйданын табыгыз.
2. Алтыпочмаклы төзек призмада ян кырының мәйданы Q га тигез. Нигезенең зуррак диагоналенә перпендикуляр һәм бу диагональне урталай бүлүче кисем мәйданын табыгыз.

М—14

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ туры параллелепипедында $AD = 17$, $DC = 28$, $AC = 39$. Ян кырының A_1D диагонале DD_1C_1C ян кырының яссылыгы белән 45° лы почмак төзи. Параллелепипедның тулы өслеге мәйданын табыгыз.

М—15

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ авыш параллелепипедында $ABCD$ квадраты нигез булып хезмәт итә. Параллелепипедның барлык кабыргалары да үзара тигез. AA_1 ян кабыргасы нигез яссылыгы белән 60° лы почмак төзи. $\angle A_1AD = \angle A_1AB < 90^\circ$. BB_1D_1D диагональ кисеменең мәйданы Q га тигез. Параллелепипедның ян өслеге мәйданын табыгыз.
2. $ABCA_1B_1C_1$ өчпочмаклы авыш призмасында кабыргалары CC_1 һәм BB_1 булган икекырлы почмаклары тиңдәшле рәвештә 45° һәм 30° ка тигез. AA_1 кабыргасыннан CC_1B_1B кырының B_1C диагоналенә кадәр ераклык 1 гә тигез. CC_1B_1B кырының мәйданы $4(1+\sqrt{3})$ кә тигез. Призманың ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—16

1. Өчпочмаклы төзек пирамидада нигезенең ягы m га тигез. Чиктәш ян кырлары арасындагы почмагы 120°. Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.
2. n-почмаклы төзек пирамидада түбәсе янындагы яссы почмагы α га тигез. Ян кырларының нигез яссылыгына авышлык почмагын табыгыз һәм $\alpha = 10°$, $n = 20$ булганда исәпләп чыгарыгыз.

М—17

1. $MABC$ пирамидасының нигезендә $AB = AC$, $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$ булган ABC почмагы ята. Пирамиданың ян кабыргалары нигез яссылыгына тигез авышкан, ә нигезенең тигез яклары аша үтүче ян кырлары нигез яссылыгына φ почмагы ясап авышкан. Пирамиданың биеклеген һәм бу кырларының һәркайсының мәйданын табыгыз.
2. $MABC$ пирамидасының нигезендә AC=4 см, BC=3 см булган ABC турыпочмаклы өчпочмагы ($\angle C = 90°$) ята. MAC кыры нигезенә перпендикуляр, ә калган ике кыры нигез яссылыгына тигез авышкан. Биеклекнең нигезеннән BMC кырына кадәр ераклык $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ см га тигез. Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—18

1. Өчпочмаклы төзек пирамидада нигезенең ягы a га тигез, ә ян кырлары нигез яссылыгына 60° лы почмак ясап авышкан. Нигезнең үзәге аша, нигезнең ягына параллель һәм шул як аша үтүче кырына перпендикуляр итеп, яссылык үткәрелгән. Кисемнең мәйданын табыгыз.
2. Өчпочмаклы төзек кисек пирамидада өске нигезенең ягы 2 гә тигез. Аскы нигезенең түбә янындагы яссы почмагы 60°. Өске нигезенең ягы аша ян кабыргасына параллель яссылык үткәрелгән. Кисем мәйданы 8 гә тигез. Әлеге кисек пирамида кисеп алынган тулы пирамиданың ян өслеге мәйданын һәм биеклеген табыгыз.

M—19

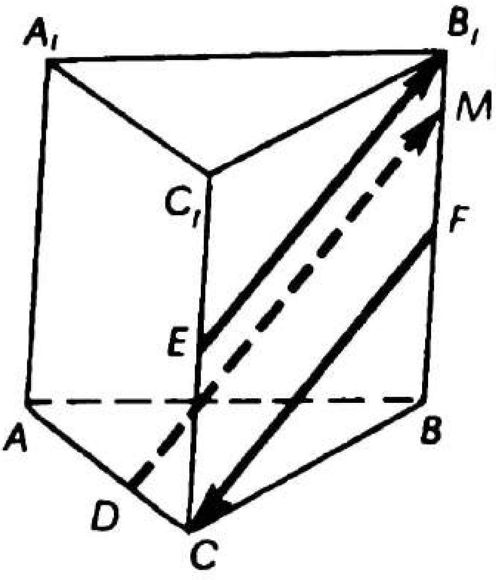
1. *PABCD* дүртпочмаклы төзек пирамидасында *K*, *M*, *T* һәм *E* нокталары — тиңдәшле рәвештә *AB*, *PA*, *PC* һәм *BC* кабыргаларының урталары.

1) Очлары *K*, *M*, *T* һәм *E* нокталарында булган бердәй юнәлешле векторларның парларын санап чыгыгыз.

2) Очлары *K*, *M*, *T* һәм *E* нокталарында булган тигез векторларның парларын санап чыгыгыз.

3) Очлары *K*, *M*, *T* һәм *E* нокталарында булган һәм тигез озынлыктагы векторларны санап чыгыгыз.

2. 32 нче рәсемдә $ABCA_1B_1C_1$ — төзек призма, *E* һәм *F* — CC_1 һәм BB_1 кабыргаларының урталары. Рәсемдә күрсәтелгән векторларның кайсылары коллинеар? Ни өчен?



Рәс. 32

M—20

1. *PABCDT* — кабыргасы *a* га тигез булган төзек октаэдр, *K* — *PC* кабыргасының уртасы. Табыгыз:

$$|\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CT} + \overrightarrow{CP}|.$$

2. *ABCD* һәм $A_1B_1C_1D_1$ дүртпочмаклары пространствода ирекле рәвештә урнашкан.

$$\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CD_1} + \overrightarrow{DA_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DD_1}$$

икәнен исбатлагыз.

M—21

1. $ABCA_1B_1C_1$ өчпочмаклы авыш призмасында *E* ноктасы — B_1B ның уртасы. C_1B исә *CE* ны *P* ноктасында кисеп үтә. *AP* векторын $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{CB}$ һәм $\overrightarrow{CC_1}$ векторлары аша күрсәтегез.

2. $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары нуль-вектор түгел һәм коллинеар да түгелләр. $(x+y-1)\vec{a} + (2x-y)\vec{b} = 0$ булса, *x* һәм *y* ны табыгыз.

М—22

1. $MABCDEF$ алтыпочмаклы төзек пирамидасында нигезенең ягы a га тигез, ә ян кабыргалары нигез яссылыгы белән φ почмагы төзиләр, $P \in MC$, өстәвенә $MP : PC = 2 : 3$. $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ һәм $\vec{e}_3$ векторлары $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{FE}$ һәм $\overrightarrow{FM}$ векторлары белән бердәй юнәлешле берәмлек векторлар булсын. $\overrightarrow{FP}$ векторын $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ һәм $\vec{e}_3$ векторлары буйлап таркатыгыз.
2. Өчпочмаклы пирамидада нигезенә параллель һәм өч ян кабыргасын кисүче ике яссылык үткәрелгән. Нигезнең һәм барлыкка килгән кисемнәрнең медианаларының кисешү нокталары бер турыда ятканын исбатлагыз.

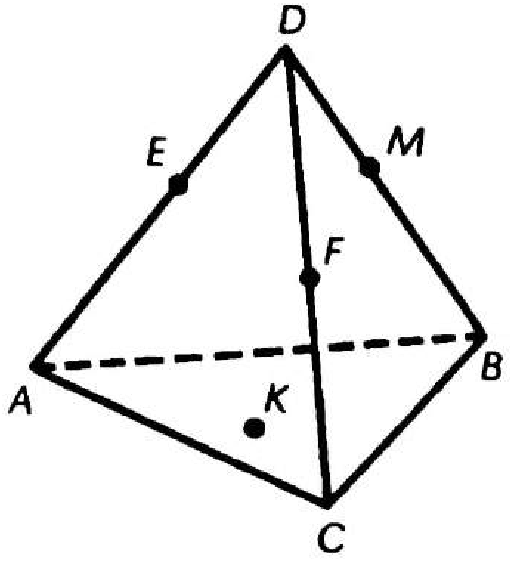
М—23

$DABC$ пирамидасында $DA = DB = DC = AC = 2$ см, $AB = BC$, $\angle ABC = 90°$. M һәм H нокталары — тиңдәшле рәвештә AD һәм DC кабыргаларының урталары.

1) Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.
2) Пирамиданың BMH яссылыгы белән кисеменең мәйданын табыгыз.
3) BMH һәм ABC яссылыклары арасындагы почмакны табыгыз.
4) BD турысы белән BMH яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.
5) K BH кисемтәсенең уртасы булса, $\overrightarrow{MK}$ векторын $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ векторлары буйлап таркатыгыз.
6) MBH һәм ABC яссылыкларының кисешү сызыгын төзегез.

7 НЧЕ ВАРИАНТ

М—1



Рәс. 33

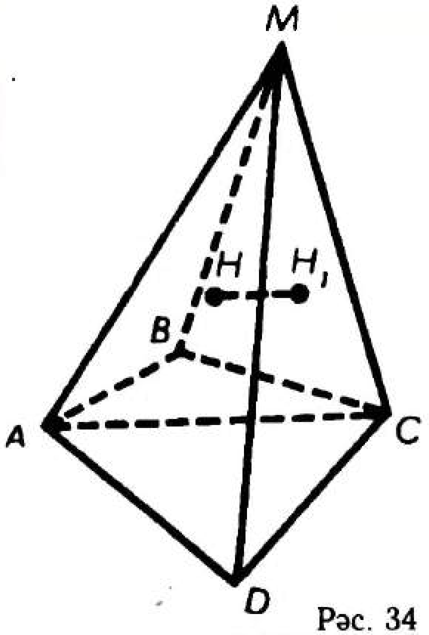
1. K ноктасы ABC яссылыгында ята. DK турысының EFM яссылыгы белән кисешү ноктасын төзегез (рәс. 33).
2. O ноктасы — ABC өчпочмагын камаучы әйләнәнең үзәге. C ноктасы A, B һәм O нокталары яткан яссылыкта ятамы?

М—2

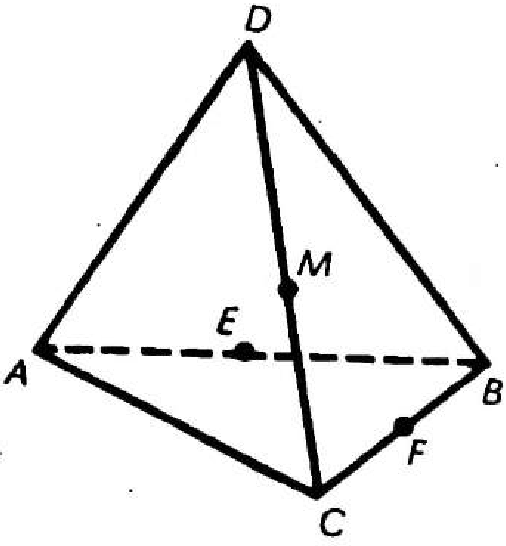
1. O ноктасы параллель a һәм b турылары белән бирелгән γ яссылыгында ята. α яссылыгы O ноктасы һәм a турысы аша үтә, ә β яссылыгы O ноктасы һәм b турысы аша үтә. Бу яссылыкларның кисешү сызыгы a һәм b турыларына параллель икәнен исбатлагыз.
2. ABC өчпочмагы α яссылыгында ята. Аның түбәләре аша α яссылыгыннан бер якта урнашкан үзара параллель AA_1, BB_1 һәм CC_1 турылары үткәрелгән, $AA_1=BB_1=CC_1$. E, F һәм M нокталары — тиңдәшле рәвештә AB, BC һәм AC кисемтәләренең урталары. A_1F, B_1M һәм C_1E кисемтәләренең бер ноктада кисешкәнен исбатлагыз. Кисешү ноктасы бу кисемтәләрне нинди чагыштырмада бүлә?

М—3

1. *AMC* яссылыгы *MAD* һәм *MCD* өчпочмаклары медианаларының кисешү нокталары *H* һәм H_1 аша үтүче турыга параллельме? Аңлатып бирегез (рәс. 34).



Рәс. 34



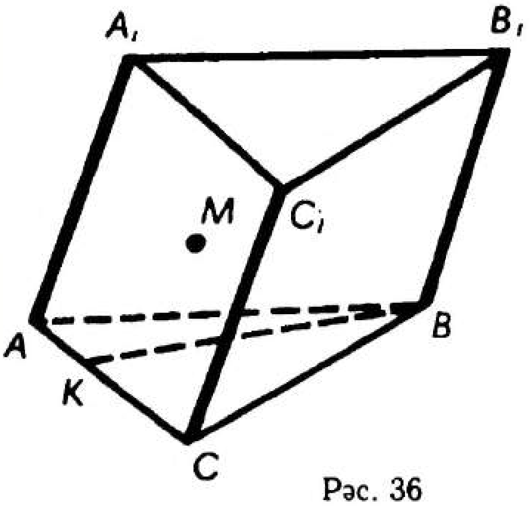
Рәс. 35

2. 35 нче рәсемдә *M*, *F* һәм *E* нокталары — *CD*, *BC* һәм *AB* кисемтәләренең урталары.

1) *MFE* яссылыгының *ABC*, *CDB*, *ADC* һәм *ADB* яссылыклары белән кисешү сызыкларын төзегез. Аңлатып бирегез.

2) $AC = 10$, $BD = 20$, ә кисешү сызыкларын төзегәндә барлыкка килгән дүртпочмакның мәйданы $25\sqrt{3}$ кә тигез булса, *AC* һәм *DB* турылары арасындагы почмакны табыгыз.

М—4



Рәс. 36

1. 36 нчы рәсемдә $AA_1 \| BB_1 \| CC_1$ һәм $AA_1 = BB_1 = CC_1$, *M* ноктасы AA_1C_1 яссылыгында ята. М ноктасы аша B_1BK яссылыгына параллель яссылык үткәрелгән. Бу яссылыкның AA_1B_1 яссылыгы белән кисешү сызыгын төзегез.

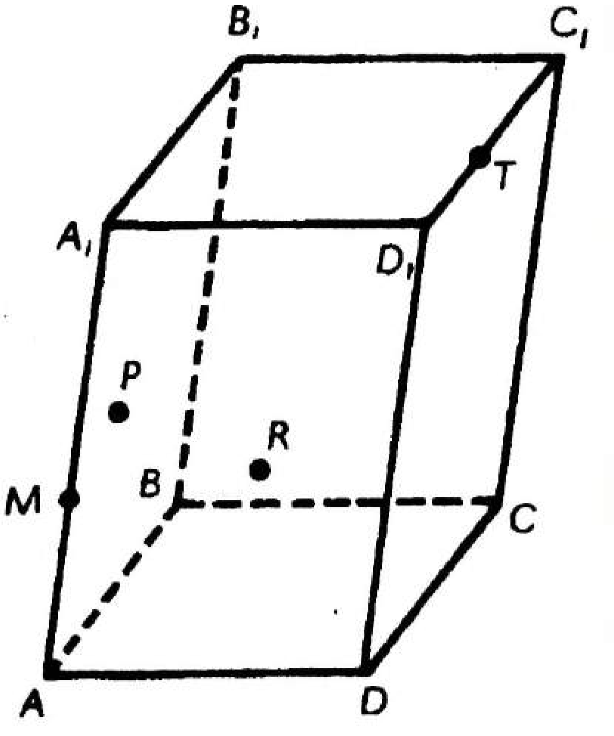
2. $M \notin \alpha$. *M* ноктасы аша α яссылыгына параллель үтүче барлык турылар кайда урнашкан?

M—5

1. Бирелгән: $ABCD$ — дүртпочмак, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ һәм $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$, өстәвенә күрсәтелгән кисемтәләр ABC яссылыгыннан бер якта урнашкан. AC_1, A_1C, B_1D һәм BD_1 кисемтәләре бер ноктада кисешәләр. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ нең параллелепипед икәнен исбатлагыз.
2. $DABC$ тетраэдрының ян кабыргасы 3 см. Ян кырларының нигез янындагы почмаклары 75° ка тигез. A ноктасы ADC кыры буйлап хәрәкәт итә башлый, аннары CDB кыры буйлап һәм, ниһаять, ADB кыры буйлап башлангыч торышына кайта. Бу ноктаның үткән иң кыска юлы күпмегә тигез?

M—6

1. $DABC$ тетраэдрында AE — ABC өчпочмагының биеклеге, O —AE ның уртасы, $DO \perp AE$ һәм $DO \perp BC$, $K \in AC$, өстәвенә $AK : KC = 3 : 1$, $BC = a$, $DO = b$. Тетраэдрның K ноктасы аша BC һәм DO турыларына параллель үтүче яссылык белән кисемен төзегез һәм кисем мәйданын табыгыз.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. P ноктасы — AA_1B_1B кырында, R AA_1D_1D кырында ята һәм $T \in C_1D_1$, $M \in AA_1$. Параллелепипедның M ноктасы аша үтүче һәм PRT яссылыгына параллель яссылык белән кисемен төзегез (рәс. 37).



Рәс. 37

M—7

1. $ABCD$ — параллелограмм. A, B, C һәм D нокталарыннан α яссылыгына AA_1, BB_1, CC_1 һәм DD_1 перпендикулярлары төшерелгән. $AA_1 = 13$, $BB_1 = 36$ һәм $CC_1 = 19$. DD_1 не табыгыз.
2. Турыда бирелгән ике ноктадан тигез ераклыктагы нокталарны табыгыз.

М—8

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедының барлык кырлары — тигез ромблар, уртак A_1 ноктасына ия булган кабыргалары арасындагы почмаклары тигез. $A_1C \perp B_1D_1$ икәнен исбатлагыз.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедының барлык кырлары — турыпочмаклыклар. M — AA_1C_1C кисеменең эчке ноктасы. Параллелепипедның M ноктасы аша үтүче һәм BB_1 гә перпендикуляр яссылык белән кисемен төзегез.

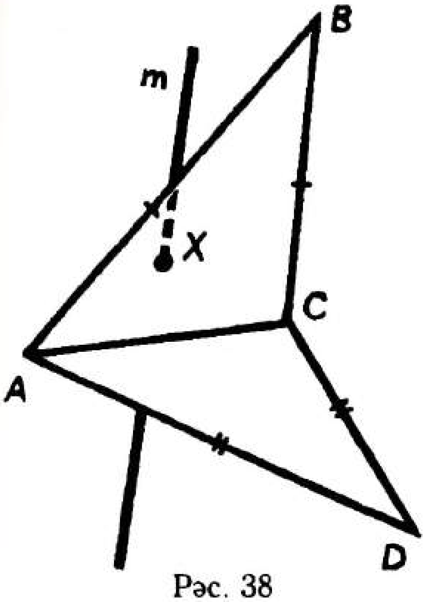
М—9

Ягы 1 гә тигез булган квадрат бирелгән. $MB \perp ABC$, $MB = 1$. AC һәм MD турылары арасындагы ераклыкны табыгыз.

М—10

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедының барлык кырлары — квадратлар, E һәм F — тиңдәшле рәвештә AD һәм AA_1 кабыргаларының урталары, K — DD_1C_1C кыры диагональләренең кисешү ноктасы. $B_1E \perp FK$ икәнен исбатлагыз.
2. $DABC$ тетраэдрында ABC — ягы $2\sqrt{3}$ кә тигез булган төзек өчпочмак; $DA = DB = DC$, $DO \perp ABC$, $DO = \sqrt{3}$. AC һәм BDC яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

М—11



Рәс. 38

1. ABC һәм ADC тигезьянлы өчпочмаклары үзара кысынкы икекырлы почмак төзиләр (рәс. 38). AC икекырлы почмагының кабыргасына перпендикуляр булган m турысы кырларның берсен X ноктасында кисеп үтә. Бу турының икенче кыр белән кисешү ноктасын төзегез.
2. $ABCD$ — ягы a га тигез булган квадрат, $BM \perp ABC$, $BM = a$. AMD һәм CMD кырлары белән төзелгән икекырлы почмакны табыгыз.

М—12

1. Тигезьянлы турыпочмаклы өчпочмакның катет һәм гипотенузасы туры икекырлы почмакның төрле кырларында ята. Өчпочмакның туры почмагының түбәсе аның кабыргасыннан 2 см ераклыкта, ә кысынкы почмагының түбәсе $\sqrt{15}$ см ераклыкта урнашкан. Өчпочмакның мәйданын табыгыз.
2. Турыпочмаклы параллелепипедның нигезенең яклары һәм ян кабыргасы 3 см, 4 см һәм 14 см га тигез. Нигезенең ике чиктәш ягының урталары һәм параллелепипед диагональләренең кисешү ноктасы аша үткәрелгән кисемнең мәйданын табыгыз.

М—13

1. $ABCA_1B_1C_1$ өчпочмаклы төзек призмасының барлык кабыргалары үзара тигез. Аның ян кырларының AC_1 һәм B_1C диагональләре арасындагы почмагын табыгыз.
2. Алтыпочмаклы төзек призмада нигезенең кечерәк диагонале ян кабыргасына тигез. Призманың кечерәк диагоналенә перпендикуляр һәм аны урталай бүлүче кисем үткәрелгән. Нигезенең ягы a га тигез булса, кисем мәйданын табыгыз.

М—14

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ туры параллелепипедының нигезендә $ABCD$ ромбы ята. AA_1 кабыргасы белән B_1D диагонале арасындагы почмак 60°, ә алар арасындагы ераклык 3 см. Нигезенең AC диагонале белән B_1D арасындагы ераклык 2 см га тигез. Параллелепипедның тулы өслеге мәйданын табыгыз.

М—15

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ авыш параллелепипедының нигезендә $ABCD$ ромбы ята, $AC = 40$, $BD = 30$, $AA_1 = 2\sqrt{17}$, $\angle A_1AD = \angle A_1AB < 90°$. Параллелепипедның биеклеге 2 гә тигез. Параллелепипедның ян өслеге мәйданын табыгыз.
2. $ABCA_1B_1C_1$ өчпочмаклы авыш призмасының нигезендә $BC = a$ булган ABC турыпочмаклы өчпочмагы ($\angle C = 90°$) ята. B_1 түбәсе C ноктасына проекцияләнә. BB_1 кабыргалы икекырлы почмагы φ гә тигез, ян кабыргасы нигез яссылыгы белән α почмагы төзи. Призманың ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—16

1. $MABC$ өчпочмаклы төзек пирамидасында нигезенең ягы a га, биеклеге $2a$ га тигез. Нигезенең AC ягы белән CMB кыры яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.
2. $PABCDEF$ алтыпочмаклы төзек пирамидасында нигезенең ягы a га, ә PBC һәм PAF кырлары арасындагы почмагы α га тигез. Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—17

1. Өчпочмаклы пирамиданың нигезендә ягы a га тигез булган төзек өчпочмак ята. Ян кырларының мәйданнары тигез. Пирамиданың биеклеге a га тигез. Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.
2. Өчпочмаклы пирамиданың биеклеге нигезенең биеклекләренең кисешү ноктасы аша үтсә, пирамиданың чалышма кабыргаларының квадратлары суммасы үзара тигез була. Исбатлагыз.

М—18

1. Дүртпочмаклы төзек пирамидада нигезенең ягы a га тигез, ә ян кабыргасы нигез яссылыгына $60°$ лы почмак ясап авышкан. Нигезенең түбәсе аша, каршы яткан ян кабыргасына перпендикуляр итеп, яссылык үткәрелгән. Кисем мәйданын табыгыз.
2. Пирамиданың нигезендә ягы $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ кә тигез булган төзек өчпочмак ята. Бер ян кыры нигез яссылыгына перпендикуляр, ә калган икесе аңа тигез почмак ясап авышкан. Пирамиданың биеклеге 12 гә тигез. Ян кабыргаларының берсендә түбәдән башлап исәпләгәндә аны 2 : 3 чагыштырмасында бүлүче нокта алынган. Бу нокта аша нигезгә параллель яссылык үткәрелгән. Килеп чыккан кисек пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—19

1. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ алтыпочмаклы төзек призмасында O ноктасы — аскы нигезенең үзәге, $M \in AA_1$.
1) Башлангычы һәм ахыры призманың түбәләрендә булган: а) $\overrightarrow{OC}$ векторы белән бердәй юнәлештәге; б) $\overrightarrow{FD}$ векторына тигез векторларны языгыз.
2) M ноктасыннан башлап $\overrightarrow{FD}$ һәм $\overrightarrow{OC}$ векторларына тигез векторларны салыгыз.
2. $DABC$ тетраэдрында F һәм E — тиңдәшле рәвештә ADB һәм CDB кырлары медианаларының кисешү нокталары, $M \in AB$, $N \in BC$, өстәвенә $AM : MB = CN : NB$.
1) $\overrightarrow{FE}$ һәм $\overrightarrow{MN}$ векторларының коллинеар икәнен исбатлагыз.
2) $AC = 18$ см булса, $|\overrightarrow{FE}|$ ын табыгыз.

М—20

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеды бирелгән. $\overrightarrow{AA_1}$ векторын $\overrightarrow{DA_1}$, $\overrightarrow{DC_1}$ һәм $\overrightarrow{DB_1}$ векторларының алгебраик суммасы рәвешендә күрсәтегез.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MD_1} = \vec{0}$$

тигезлеге дөрес булган M ноктасын күрсәтегез.

М—21

1. $DABC$ тетраэдрында $\angle DAC = \angle DAB$. DBC кыры ABC яссылыгына перпендикуляр. DM — тетраэдрның биеклеге, $AC = a$, $AB = b$, $AD = c$. A ноктасыннан башлап тиңдәшле рәвештә $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{AD}$ векторлары белән бердәй юнәлештәге $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ һәм $\vec{e}_3$ берәмлек векторлары салынган. $\overrightarrow{DM}$ векторын $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ һәм $\vec{e}_3$ векторлары аша күрсәтегез.
2. O ноктасы $ABCD$ трапециясе (AD һәм BC — нигезләре) яссылыгыннан читтә ята. AD нигезе BC дан k тапкыр зуррак. $\overrightarrow{OD}$ векторын $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ һәм $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ векторлары аша күрсәтегез.

М—22

1. $PABCD$ пирамидасының нигезендә $ABCD$ параллелограммы ята, $M \in BD$ һәм $N \in PC$, өстәвенә $MN \parallel AF$, монда F — PB ның уртасы. $\frac{MN}{AF}$ чагыштырмасын табыгыз.
2. A, B, C һәм D нокталары бирелгән, өстәвенә $A \notin BC$. $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, шул ук вакытта $x + y + z = 1$ һәм O — пространствода ирекле рәвештә алынган нокта булса, бу нокталарның бер яссылыкта ятканын исбатлагыз.

М—23

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ туры параллелепипедының нигезендә $ABCD$ ромбы ята. $AC = 8$ см, $BD = 6$ см, $BB_1 = 6$ см.

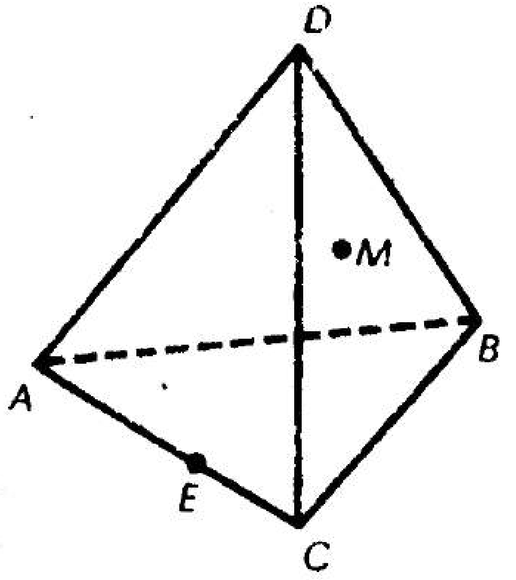
1. AD ягы һәм P ноктасы аша ($P \in BB_1$ һәм $PB = 2$ см) яссылык үткәрелгән. Барлыкка килгән өчпочмаклы призманың ян өслеге мәйданын табыгыз.
2. Параллелепипедның B_1D диагонале аша, нигезенең AC диагоналенә параллель итеп, яссылык үткәрелгән.

1) Кисем мәйданын табыгыз.
2) $ABCD$ ромбы диагональләренең кисешү ноктасыннан кисем яссылыгына кадәр ераклыкны табыгыз.
3) AA_1 белән B_1D арасындагы ераклыкны табыгыз.
4) $\overrightarrow{OK}$ векторын $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ һәм $\overrightarrow{AA_1}$ векторлары буйлап таркатыгыз.
5) AD белән кисем яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

8 НЧЕ ВАРИАНТ

М—1

1. M ноктасы BDC яссылыгында ята. AM турысының DBE яссылыгы белән кисешү ноктасын төзегез (рәс. 39).
2. O ноктасы — $ABCD$ дүртпочмагын камаучы әйләнәнең үзәге. A, O һәм C нокталары α яссылыгында ята. D түбәсе бу яссылыкта ятамы?



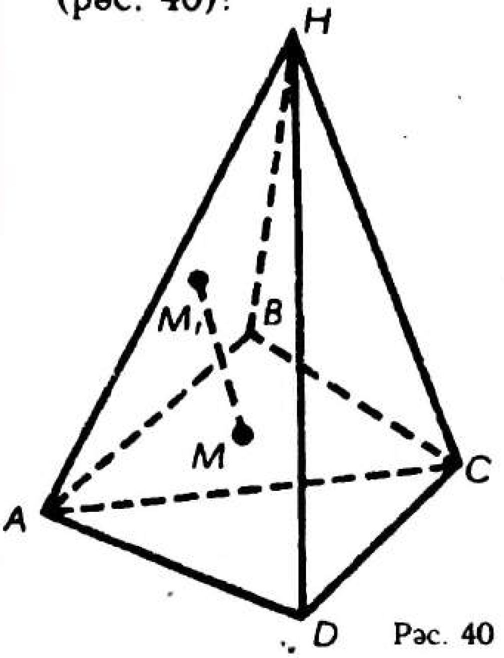
Рәс. 39

М—2

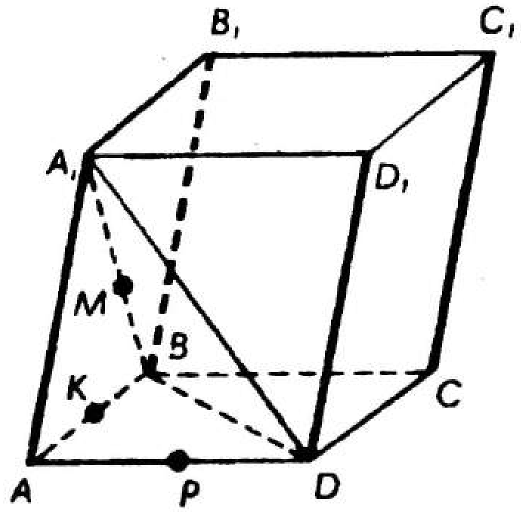
1. a һәм b — чалышма турылар һәм M ноктасы аларның берсендә дә ятмый. M ноктасы аша үтүче һәм бирелгән ике турыны да кисүче турының һәрвакытта да булуы мөмкинме?
2. ABC өчпочмагы α яссылыгында урнашкан. Аның түбәләре аша α яссылыгыннан бер якта урнашкан үзара параллель AA_1, BB_1 һәм CC_1 кисемтәләре үткәрелгән, $AA_1 = BB_1 = CC_1$. F, E һәм M нокталары —тиңдәшле рәвештә B_1C, AC_1 һәм A_1B кисемтәләренең урталары. EMF һәм ABC өчпочмакларының охшаш икәнен исбатлагыз.

M—3

1. *AHC* яссылыгы *ABC* һәм *HAB* өчпочмаклары медианаларының кисешү нокталары *M* һәм M_1 аша үтүче турыга параллельме (рәс. 40)?



Рәс. 40



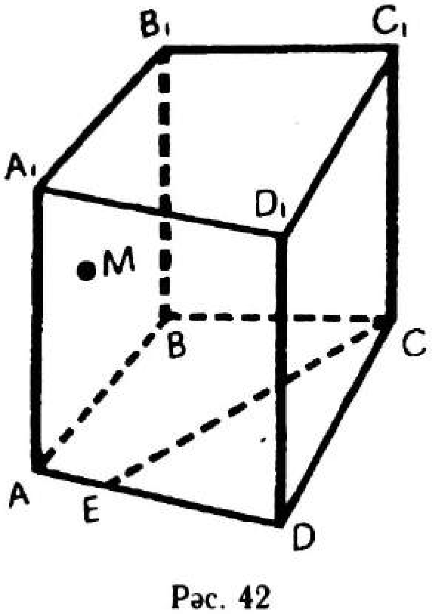
Рәс. 41

2. 41 нче рәсемдә *ABCD* — параллелограмм, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$ һәм $AA_1 \| BB_1 \| CC_1 \| DD_1$, *K*, *M* һәм *P* нокталары — *AB*, A_1B һәм *AD* кисемтәләренең урталары, $AA_1 = 20$, $BD = 40$. CC_1 һәм *BD* турылары арасындагы почмак туры.

1) *MKP* яссылыгының AA_1B, BA_1D, AA_1D_1 һәм *ABC* яссылыклары белән кисешү сызыкларын төзегез.

2) Төзелгән кисешү сызыкларыннан барлыкка килгән дүртпочмакның мәйданын табыгыз.

M—4



Рәс. 42

1. 42 нче рәсемдә $AA_1 \| BB_1 \| CC_1 \| DD_1$ һәм $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$, *M* ноктасы AA_1B_1 яссылыгында ята. *M* ноктасы аша C_1CE яссылыгына параллель яссылык үткәрелгән. Бу яссылыкның AA_1D_1 яссылыгы белән кисешү сызыгын төзегез.

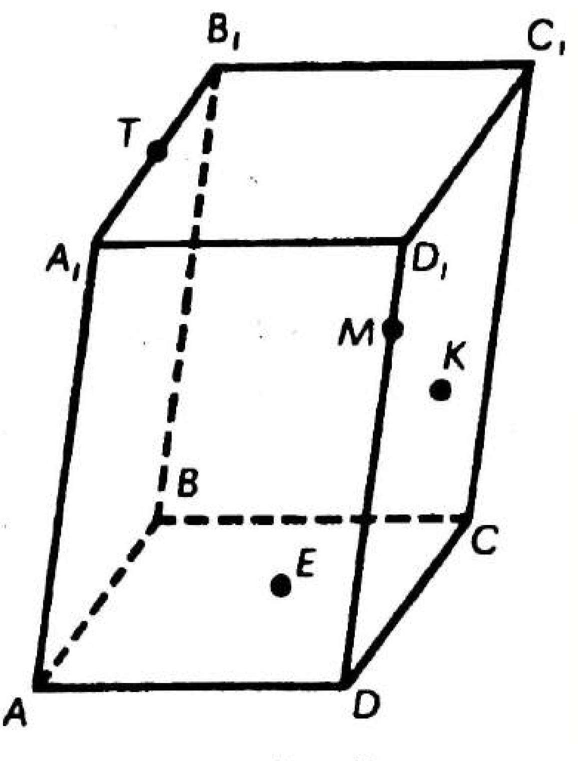
2. Бирелгән: $\alpha \| \beta$. *AB* һәм *CD* кисемтәләре *M* ноктасында кисешәләр. *A* һәм *C* нокталары — α яссылыгында, ә *D* һәм *B* нокталары β яссылыгында ята. $\frac{AM}{MB} = \frac{CM}{MD}$ икәнен исбатлагыз.

М—5

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедының AC_1 диагонале BDA_1 кисеме медианаларының кисешү ноктасы аша үткәнен исбатлагыз.
2. $DABC$ тетраэдрында ян кырларының нигез янындагы почмагы $70°$ ка тигез. A ноктасы ADC кыры буйлап хәрәкәт итә башлый, аннары CDB кыры буйлап һәм, ниһаять, ADB кыры буйлап башлангыч торышына кайта. Нокта үткән иң кыска юл $12\sqrt{3}$ см га тигез. Ян кабыргасының озынлыгын табыгыз.

М—6

1. $DABC$ тетраэдрында $AC = 12$, $DB = 9$. O — ABC өчпочмагы медианаларының кисешү ноктасы. Тетраэдрның O ноктасы аша AC һәм DB турыларына параллель итеп үткәрелгән яссылык белән кисемен төзегез. AC һәм BD турылары арасындагы почмак $60°$ булса, кисемнең мәйданын табыгыз.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, $T \in A_1B_1$, $M \in DD_1$, K — DD_1C_1C кыры яссылыгында, E исә AA_1D_1D кыры яссылыгында ята. Параллелепипедның TEK яссылыгына параллель яссылык белән кисемен төзегез (рәс. 43).



Рәс. 43

М—7

1. α яссылыгы ABC турыпочмаклы өчпочмагының ($\angle C = 90°$) иң зур урта сызыгына параллель. $AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$, һәм $CC_1 \perp \alpha$, $C_1B_1 = 11$ см, $C_1A_1 = 12$ см, $A_1B_1 = 19$ см. Өчпочмакның мәйданын табыгыз.
2. Яссылыкта бирелгән ике ноктадан тигез ераклыктагы нокталарны табыгыз.

М—8

1. $MPKHM_1P_1K_1H_1$ параллелепипедының барлык кырлары ромблар, $\angle M_1MH + \angle M_1MP = 180°$. $P_1H \perp MK$ икәнен исбатлагыз.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедының барлык кырлары — турыпочмаклыклар. M — AA_1C_1C кисеменең эчке ноктасы. Параллелепипедның M ноктасы аша үтүче һәм BC га перпендикуляр яссылык белән кисемен төзегез.

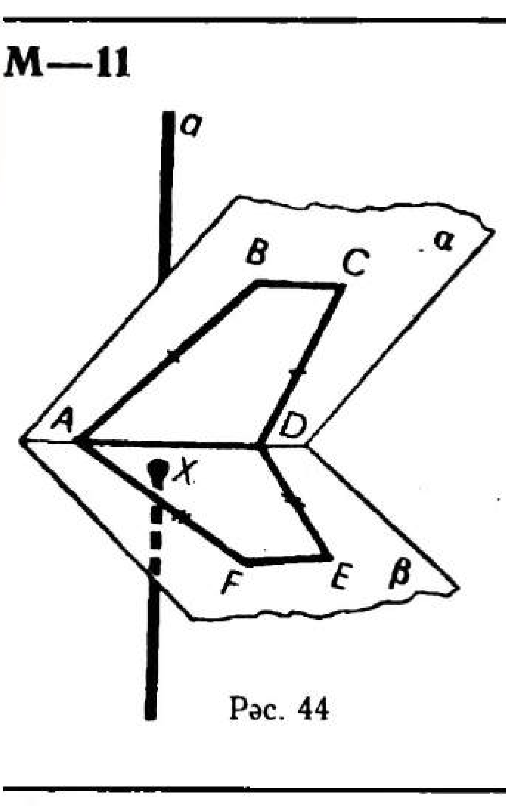
М—9

AB һәм CD кисемтәләре үзләренең очлары белән параллель α һәм β яссылыкларына таяна, өстәвенә A һәм C нокталары — α яссылыгында, ә B һәм D нокталары β яссылыгында ята, $AB \perp \alpha$. $AB = 20$, $CD = 25$, $AC = 14$ һәм $BD = 13$ булса, AB белән CD арасындагы ераклыкны табыгыз.

М—10

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедының барлык кырлары — турыпочмаклыклар, K — AA_1нең уртасы, L — DD_1C_1C кыры диагональләренең кисешү ноктасы, $E \in AD$, $AD = 4$, $CD = 2$, $AE = \frac{1}{2}$. $B_1E \perp KL$ икәнен исбатлагыз.
2. $ABCD$ — квадрат, O — аның диагональләренең кисешү ноктасы, $MO \perp ABC$, F — AB ның уртасы. Квадратның ягы 4 кә тигез. $MO = 2\sqrt{3}$. FD белән DMC яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

М—11



Рәс. 44

1. $ABCD$ һәм $ADEF$ тигезьянлы трапецияләре α һәм β яссылыкларында урнашкан (рәс. 44). a турысы бу яссылыклар белән төзелгән кысынкы икекырлы почмакның AD кабыргасына перпендикуляр. a турысы β яссылыгын X ноктасында кисеп үтә. a турысының α яссылыгы белән кисешү ноктасын төзегез.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедының барлык кырлары — квадратлар. Параллелепипедның AB_1C_1D һәм CB_1A_1D кисемнәре белән төзелгән икекырлы почмакның зурлыгын табыгыз.

М—12

1. $ABCD$ һәм $CEFK$ тигез квадратлары үзара перпендикуляр ике яссылыкта урнашкан. Аларның CD һәм CE яклары шул яссылыкларның кисешү сызыгындагы уртак түбәләре C ның төрле ягында яталар. DB һәм EK турылары арасындагы почмакны табыгыз.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында $AD = 4$, $CD = 3$ һәм $CC_1 = 14$. Параллелепипедның AD һәм DC ның уртасы аша һәм B_1D га параллель үтүче яссылык белән кисемен төзегез. Кисемнең мәйданын табыгыз.

М—13

1. $ABCA_1B_1C_1$ өчпочмаклы туры призмасында ACB турыпочмаклы өчпочмагы ($\angle C = 90°$) нигез булып хезмәт итә, $AC = 4$, $BC = 3$, $BB_1 = 4$. Ике ян кырының AC_1 һәм B_1C диагональләре арасындагы почмагын табыгыз.
2. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ алтыпочмаклы төзек призмасында нигезенең ягы a га, ян кабыргасы $2a$ га тигез. F_1C диагоналенең уртасы аша, аңа перпендикуляр итеп, кисем үткәрелгән. Кисем мәйданын табыгыз.

М—14

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ туры параллелепипедының нигезендә ромб ята, $\angle BAD = 60°$. Ян кабыргасының озынлыгы 4 см, ә AD белән D_1C арасындагы ераклык $\frac{12}{5}$ см га тигез. Параллелепипедның тулы өслеге мәйданын табыгыз.

М—15

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ авыш параллелепипедының нигезендә $ABCD$ параллелограммы ята, $AD = 15$, $BD = 7$, $\angle BDA = 60°$, $\angle A_1AD = \angle A_1AB < 90°$. A_1D нигез яссылыгы белән 45° лы почмак төзи. A_1 түбәсе BD га проекцияләнә. Параллелепипедның ян өслеге мәйданын табыгыз.
2. $ABCA_1B_1C_1$ авыш призмасының нигезе булып ABC турыпочмаклы өчпочмагы ($\angle C=90°$) хезмәт итә. B_1 түбәсе BC ның уртасына проекцияләнә. Ян кабыргасы l га тигез һәм нигез яссылыгы белән φ почмагы төзи. Кабыргасы BB_1 булган икекырлы почмагы α га тигез. Призманың ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—16

1. $MABCD$ дүртпочмаклы төзек призмасында нигезенең ягы a га, ә биеклеге $a\sqrt{2}$ гә тигез. MA ян кабыргасы белән DMC яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.
2. Алтыпочмаклы төзек пирамидада нигезенең ягы a га, чиктәш ян кырлары арасындагы почмагы φ гә тигез. Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—17

1. $MABC$ пирамидасының нигезендә $AB = AC$, $BC = 24$, ә биеклеге $AK = 5$ булган ABC тигезьянлы өчпочмагы ята. Ян кырларының M түбәсеннән үткәрелгән биеклекләре үзара тигез. Пирамиданың биеклеге 12 гә тигез. $\angle MAB \neq \angle MAC$ икәне билгеле булса, ян өслегенең мәйданын табыгыз.
2. Өчпочмаклы пирамидада биеклекләренең берсе тиешле кырының биеклекләренең кисешү ноктасына проекцияләнсә, икенче биеклеге дә шундый ук үзлеккә ия була. Исбатлагыз.

М—18

1. $MABCD$ пирамидасының нигезендә диагональләре $AC = 32$ см һәм $BD = 18$ см булган ромб ята. Нигезенең AB һәм AD яклары аша үтүче кырлары нигез яссылыгына перпендикуляр. Аларның уртак кабыргасы 24 см га тигез. A ноктасы һәм MC кабыргасының уртасы аша BD га параллель яссылык үткәрелгән. Кисем мәйданын табыгыз.
2. Пирамиданың нигезендә катетлары 32 см һәм 10 см га тигез булган турыпочмаклы өчпочмак ята. Пирамиданың ян кабыргалары нигез яссылыгына тигез авышкан. Пирамиданың биеклеге 12 см га тигез. Ян кабыргасында түбәсеннән башлап исәпләгәндә аны 1 : 3 чагыштырмасында бүлүче нокта алынган. Шул нокта аша нигезенә параллель яссылык үткәрелгән. Барлыкка килгән кисек пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.

M—19

1. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ алтыпочмаклы төзек призмасында O_1 ноктасы — өске нигезенең үзәге.
1) Башлангычы һәм ахыры призманың түбәләре булган һәм
   а) $\overrightarrow{O_1F_1}$ векторына капма-каршы юнәлгән;
   б) $\overrightarrow{FC}$ векторы белән бердәй озынлыктагы векторларны языгыз.
2) A_1 ноктасыннан башлап $\overrightarrow{B_1D}$ һәм $\overrightarrow{OE}$ векторларына тигез векторларны салыгыз.
2. $PABCD$ пирамидасының нигезе булып $ABCD$ параллелограммы хезмәт итә, P һәм T — BPC һәм DPC кырлары медианаларының кисешү нокталары, E һәм F — тиңдәшле рәвештә AB һәм CD кабыргаларының урталары.
1) $\overrightarrow{PT}$ һәм $\overrightarrow{FE}$ векторларының коллинеар икәнен исбатлагыз.
2) $PT = 6$ см булса, $|\overrightarrow{FE}|$ ын табыгыз.

M—20

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеды бирелгән. $\overrightarrow{DB}$ векторын $\overrightarrow{DA_1}$, $\overrightarrow{DB_1}$ һәм $\overrightarrow{DC_1}$ векторларының алгебраик суммасы рәвешендә күрсәтегез.
2. $EABCDF$ — төзек октаэдр.

$$\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KF} = \overrightarrow{0}$$

үтәлердәй K ноктасын күрсәтегез.

M—21

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында $\angle A_1AD = \angle A_1AB$, $AD = a$, $AB = b$ $(a > b)$, $AA_1 = c$, A_1M — параллелепипедның биеклеге, AM исә BC ны P ноктасында кисеп үтә. $\overrightarrow{A_1P}$ векторын A ноктасыннан башлап салынган һәм тиңдәшле рәвештә $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{AA_1}$ векторлары белән бердәй юнәлештәге $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ һәм $\vec{e}_3$ берәмлек векторлары аша күрсәтегез.
2. ABC өчпочмагында E һәм F нокталары AB һәм BC якларында ята, өстәвенә $\frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FB} = \frac{3}{2}$. O ноктасы ABC өчпочмагы яссылыгыннан читтә урнашкан. $\overrightarrow{OF}$ векторын $\overrightarrow{OE} = \vec{m}$, $\overrightarrow{OA} = \vec{p}$ һәм $\overrightarrow{OC} = \vec{k}$ векторлары аша күрсәтегез.

M—22

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында $M \in BD$ һәм $N \in B_1C$, өстәвенә $MN \parallel AC_1$. $\frac{BM}{MD}$ һәм $\frac{B_1N}{NC}$ чагыштырмаларын табыгыз.
2. A, B, C һәм D нокталары бирелгән, өстәвенә $A \notin BC$. Бу нокталар бер яссылыкта ятсалар, ул вакытта $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ (шул ук вакытта $x + y + z = 1$ һәм O — пространствода ирекле рәвештә алынган нокта) икәнен исбатлагыз.

M—23

1. $MABCD$ пирамидасының нигезендә ягы a га тигез булган $ABCD$ квадраты ята. MAB кыры төзек өчпочмак һәм нигез яссылыгына перпендикуляр.

1) Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.
2) MD кабыргасының уртасы аша нигез яссылыгына перпендикуляр һәм AB га параллель итеп үткәрелгән кисемнең мәйданын табыгыз.
3) AMB һәм DMC яссылыклары арасындагы почмакны табыгыз.
4) MD белән кисем яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.
5) H кисем диагональләренең кисешү ноктасы булсын. $\overrightarrow{AH}$ векторын $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ һәм $\overrightarrow{AM}$ векторлары буйлап таркатыгыз.
6) BC белән MD арасындагы ераклыкны табыгыз.

ӨСТӘМӘ МӨСТӘКЫЙЛЬ ЭШЛӘР

ӨМ-1 1нче вариант

1. Өч нокта яссылыкка проекцияләнә. Бу вакытта проекция яссылыгында ничә нокта килеп чыгуы мөмкин?

2. Бер ягының уртасыннан диагональләренә перпендикулярлар төшерелгән ромбны сурәтләгез.

3. Үзәгеннән якларының берсенә перпендикуляр төшерелгән төзек алтыпочмакны сурәтләгез.

ӨМ-1 2нче вариант

1. Ике параллель турының яссылыкка проекциясе нәрсәдән гыйбарәт?

2. Ян ягының уртасыннан нигезенә перпендикуляр төшерелгән тигезьянлы өчпочмакны сурәтләгез.

3. Үзәгеннән кечерәк диагоналенә перпендикуляр төшерелгән төзек алтыпочмакны сурәтләгез.

ӨМ-1 3нче вариант

1. Турыпочмаклыкның параллель проекцияләгәндә саклана торган үзлекләрен санап чыгыгыз.

2. Бер тышкы почмагының биссектрисасы үткәрелгән төзек алтыпочмакны сурәтләгез.

3. ABC турыпочмаклы өчпочмагының ($\angle C = 90°$) AC һәм BC катетлары $2:3$ кә чагыштырмасында. Турыпочмак түбәсеннән биеклеге төшерелгән өчпочмакны сурәтләгез.

ӨМ-1 4нче вариант

1. Ромбның параллель проекцияләгәндә саклана торган үзлекләрен санап чыгыгыз.

2. Почмагы $60°$ булган һәм диагональләренең кисешү ноктасыннан ягына перпендикуляр төшерелгән ромбны сурәтләгез.

3. Камаулы әйләнәнең үзәген күрсәтеп, яклары $AB = BC = 4$ һәм $AC = 5$ булган ABC тигезьянлы өчпочмагын сурәтләгез.

ӨМ-1 5 нче вариант

1. Ике чалышма турының яссылыкка проекциясе нәрсәдән гыйбарәт?

2. C түбәсеннән BE кисемтәсенә перпендикуляр төшерелгән (монда E — AD ның уртасы) $ABCD$ квадратын сурәтләгез.

3. Камаучы әйләнәнең үзәген күрсәтеп, нигез янындагы почмагы 45° ка тигез булган $ABCD$ тигезьянлы трапециясен (AD һәм BC — нигезләре) сурәтләгез.

ӨМ-1 6 нчы вариант

1. Ике турының яссылыкка проекцияләре параллель. Турылар үзләре үзара ничек урнашкан?

2. Камаучы әйләнәнең үзәге өчпочмак эчендә урнашкан ниндидер өчпочмакның сурәте бирелгән. Бу өчпочмакның биеклекләренең сурәтен төзегез.

3. Гипотенузасында квадрат төзелгән тигезьянлы турыпочмаклы өчпочмакны сурәтләгез (квадрат өчпочмакның тышында ята).

ӨМ-2 1 нче вариант

1. Яссы почмаклары: а) 90°, 20°, 120°; б) 40°, 30°, 70° булган өчкырлы почмак бармы?

2. $OABC$ өчкырлы почмагының барлык яссы почмаклары 60° ка тигез. OA кабыргасы BOC яссылыгы белән нинди почмак төзи?

3. Өчкырлы почмакның яссы почмаклары 45°, 60° һәм 90° ка тигез. 60° лы яссы почмакка каршы яткан икекырлы почмакны табыгыз.

ӨМ-2 2 нче вариант

1. Яссы почмаклары: а) 100°, 150°, 110°; б) 60°, 90°, 120° булган өчкырлы почмак бармы?

2. $OABC$ өчкырлы почмагында $\angle AOC = \angle AOB$, $\angle BOC = 90°$. OA кабыргасы каршы яткан яссы почмак яссылыгы белән 45° лы почмак төзи. Тигез яссы почмакларны табыгыз.

3. Өчкырлы почмакның яссы почмаклары 120°, 120° һәм 90° ка тигез. Кечерәк яссы почмакка каршы яткан икекырлы почмакны табыгыз.

ӨМ-2 3нче вариант

1. Өчкырлы почмакның ике яссы почмагы 110° һәм 100° ка тигез. Өченче яссы почмагының зурлыгы нинди чикләрдә булуы мөмкин?

2. $DABC$ пирамидасында $\angle DAC = \angle DAB = 30^\circ$. AD кабыргасы янындагы икекырлы почмагы 90° ка тигез, $DC \perp AC$ һәм $DB \perp AB$, $DC = DB = 20$. BDC кырының мәйданын табыгыз.

3. Өчкырлы почмакның яссы почмаклары 60°, 60° һәм 90° ка тигез. Әгәр бу почмакның зуррак яссы почмаклы кырына перпендикуляр яссылык белән кисеме тигезьянлы өчпочмак формасында булса (өчпочмакның нигезе туры почмак яссылыгында ята), ул вакытта кисүче яссылык өчкырлы почмакның кабыргаларыннан тигез кисемтәләр кисеп ала. Исбатлагыз.

ӨМ-2 4нче вариант

1. Бишпочмаклы төзек пирамиданың нигезе янындагы яссы почмаклары нинди чикләрдә үзгәрүе мөмкин?

2. $DABC$ пирамидасында $\angle DAC = \angle DAB = 60^\circ$. AD кабыргасы янындагы икекырлы почмагы 120° ка тигез, $DC \perp AC$, $DB \perp AB$, $BC = \sqrt{39}$. BDC өчпочмагын камаучы әйләнәнең радиусын табыгыз.

3. Өчкырлы почмакның яссы почмаклары 60°, 60°, 90°. Кабыргаларыннан өч тигез кисемтә кисеп алучы яссылыкның туры почмак яссылыгына перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

ӨМ-2 5нче вариант

1. Өчкырлы почмакта тигез яссы почмакларга каршы тигез икекырлы почмаклар ятканын исбатлагыз.

2. $ABCA_1B_1C_1$ өчпочмаклы авыш призмасында $\angle A_1AC = 45^\circ$, $\angle A_1AB = 60^\circ$, $\angle BAC = 90^\circ$, $AC = \sqrt{6}$, $AB = 2\sqrt{3}$, $AA_1 = 5$. Призманың ян өслеге мәйданын табыгыз.

3. $MABCD$ пирамидасының нигезендә ягы a га тигез квадрат ята. MAB кыры — яссылыгы нигез яссылыгына перпендикуляр булган төзек өчпочмак. MD кабыргасы янындагы икекырлы почмакны табыгыз.

ӨМ-2 6нчы вариант

1. Өчкырлы почмакта тигез икекырлы почмакларга каршы тигез яссы почмаклар ятканын исбатлагыз.

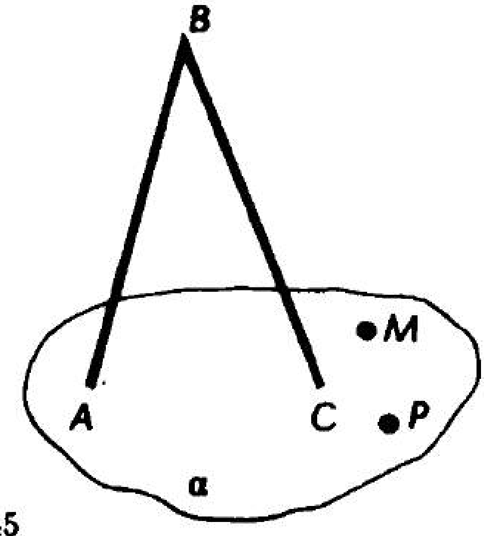
2. Дүртпочмаклы төзек пирамидада ян кабыргасы янындагы икекырлы почмагы 120° ка, ә ян кырынын биеклеге m га тигез. Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.

3. $MABCD$ пирамидасының нигезендә ягы a га тигез квадрат ята. MB кабыргасы a га тигез һәм нигез яссылыгына перпендикуляр. Кабыргасы MD булган икекырлы почмакның зурлыгын табыгыз.

КОНТРОЛЬ ЭШЛӘР

К-1 1нче вариант

1. A, C, M һәм P нокталары α яссылыгында ята, $B \notin \alpha$ (рәс. 45). MP турысының ABC яссылыгы белән кисешү ноктасын төзегез. Аңлатып бирегез.



Рәс. 45

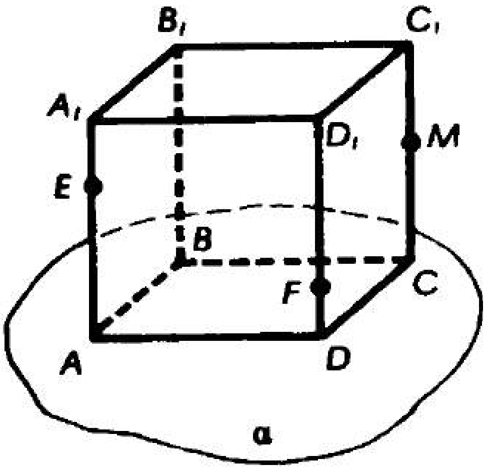
2. ABC һәм ADC өчпочмаклары төрле яссылыкларда яталар һәм уртак AC ягына ия. E ноктасы — AB ягында, ә F ноктасы BC ягында ята, өстәвенә EF ADC яссылыгына параллель. P — AD ның уртасы, ә K — DC ның уртасы.

1) $EF \parallel PK$ икәнен исбатлагыз.

2) PK һәм AB турыларының үзара торышы нинди? $\angle ABC = 40°$ һәм $\angle BCA = 80°$ булса, бу турылар арасындагы почмак күпмегә тигез?

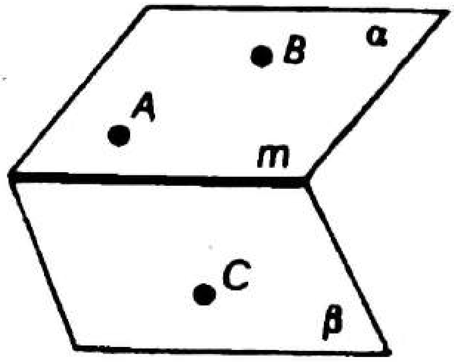
3. α һәм β яссылыклары m турысы буйлап кисешәләр. a турысы α яссылыгында ята. a турысы белән β яссылыгының мөмкин булган үзара торышы нинди? Сызымын сызыгыз һәм аңлатып бирегез.

4*. 46 нчы рәсемнән файдаланып, EFM яссылыгы белән α яссылыгының кисешү сызыгын төзегез. Аңлатып бирегез.



Рәс. 46

1. A һәм B нокталары — α яссылыгында, ә C ноктасы β яссылыгында ята (рәс. 47). ABC яссылыгының α һәм β яссылыклары белән кисешү сызыкларын төзегез. Аңлатып бирегез.



Рәс. 47

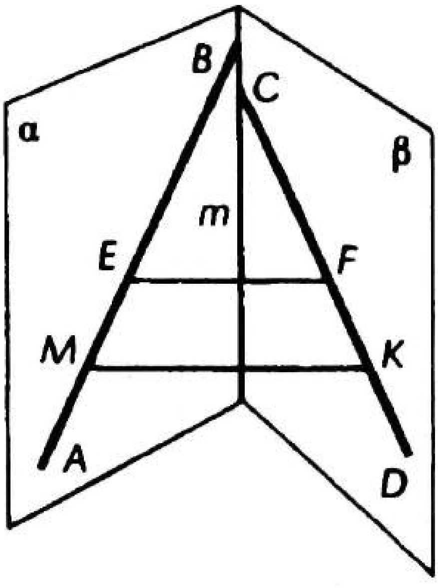
2. ABC һәм DCE өчпочмаклары төрле яссылыкларда яталар һәм уртак C түбәсенә ия. $AB \parallel DE$.

1) ABC һәм DCE яссылыкларының кисешү сызыгын төзегез.

2) AB һәм DF турыларының үзара торышы нинди (монда F ноктасы CE ягында ята)? $\angle FED = 60°$ һәм $\angle DFE = 100°$ булса, бу турылар арасындагы почмак күпмегә тигез? Аңлатып бирегез.

3. a турысы α яссылыгына параллель, M ноктасы белән c турысы α яссылыгында ята ($M \notin c$). M ноктасы аша, a га параллель итеп, b турысы үткәрелгән. b һәм c турылары үзара ничек урнашкан? Аңлатып бирегез.

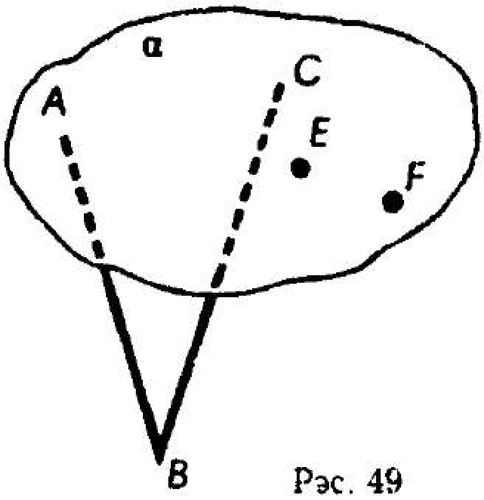
4*. α һәм β яссылыклары m турысы буйлап кисешәләр (рәс. 48). AB турысы — α яссылыгында, ә CD турысы β яссылыгында ята. EF һәм MK турылары параллель булсын өчен шартта нәрсәне үзгәртергә кирәк? Аңлатып бирегез.



Рәс. 48

1. *A*, *C*, *E* һәм *F* нокталары α яссылыгында ята, ә $B \notin \alpha$ (рәс. 49). *EF* турысының *ABC* яссылыгы белән кисешү ноктасын төзегез. Аңлатып бирегез.

2. *ABCD* трапециясе (*AD* һәм *BC* — нигезләр) белән *AED* өчпочмагы уртак *AD* ягына ия һәм төрле яссылыкларда яталар. *M* ноктасы — *AE* ягында, ә *P* исә *DE* ягында ята, өстәвенә *MP* трапеция яссылыгына параллель.



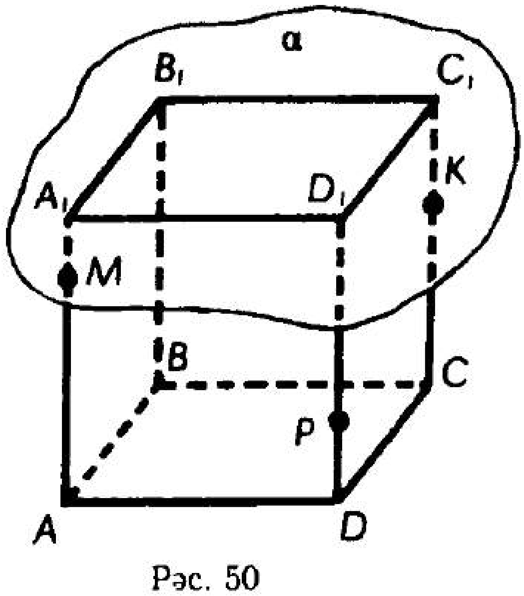
Рәс. 49

1) $MP \parallel BC$ икәнен исбатлагыз.

2) *MP* һәм *AB* турыларының үзара торышы нинди? $\angle ABC = 110°$ булса, бу турылар арасындагы почмак күпмегә тигез? Аңлатып бирегез.

3. α һәм β яссылыклары *m* турысы буйлап кисешәләр. *a* турысы — α яссылыгында, ә *b* β яссылыгында ята. *a* һәм *b* турыларының үзара торышы нинди булуы мөмкин? Сызымын сызыгыз һәм аңлатып бирегез.

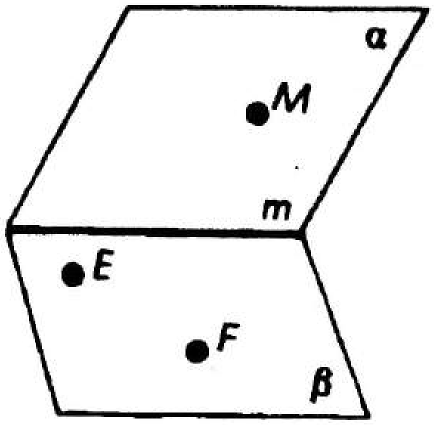
4*. 50 нче рәсемнән файдаланып, *MPK* яссылыгының α яссылыгы белән кисешү сызыгын төзегез. Аңлатып бирегез.



Рәс. 50

К-1 4нче вариант

1. E һәм F нокталары — β яссылыгында, ә M ноктасы α яссылыгында ята (рәс. 51). EMF яссылыгының α һәм β яссылыклары белән кисешү сызыкларын төзегез. Аңлатып бирегез.



Рәс. 51

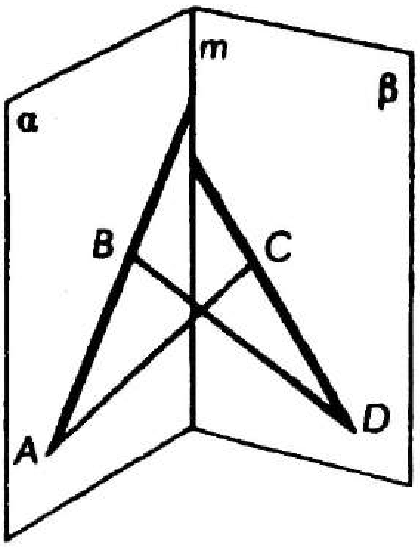
2. $ABCD$ трапециясенең AD нигезе α яссылыгында ята. B һәм C нокталары аша α яссылыгын тиңдәшле рәвештә E һәм F нокталарында кисүче параллель турылар үткәрелгән.

1) $BCFE$ ның параллелограмм икәнен исбатлагыз.

2) EF һәм AB турыларының үзара торышы нинди? $\angle ABC = 150°$ булса, алар арасындагы почмак күпмегә тигез? Аңлатып бирегез.

3. AB кисемтәсе α яссылыгына параллель, ә CD кисемтәсе шул яссылыкта ята, өстәвенә $AB \| CD$. $ABCD$ дүртпочмагын параллелограмм дип раслап буламы? Аңлатып бирегез.

4*. α һәм β яссылыклары m турысы буйлап кисешәләр (рәс. 52). AB турысы — α яссылыгында, ә CD β яссылыгында ята. AC һәм BD турылары кисешсен өчен шартта нәрсәне үзгәртергә кирәк? Бу нинди очракта мөмкин?

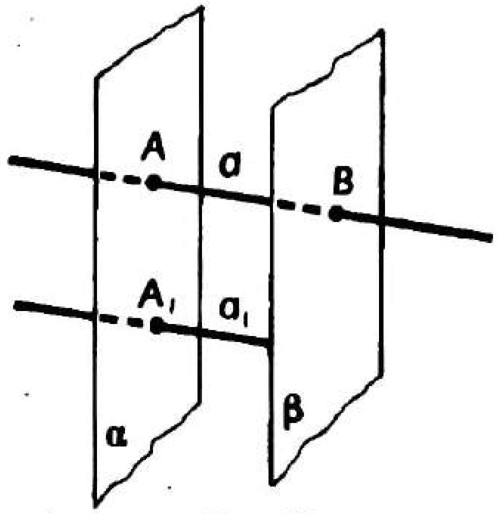


Рәс. 52

К-2 1 нче вариант

1. *ABCD* һәм *ADFE* параллелограммнары төрле яссылыкларда яталар һәм уртак *AD* ягына ия. *BC* га параллель *m* турысы *ABE* һәм *DCF* яссылыкларын тиңдәшле рәвештә *H* һәм *P* нокталарында кисеп үтә. *HPFE* ның параллелограмм икәнен исбатлагыз.

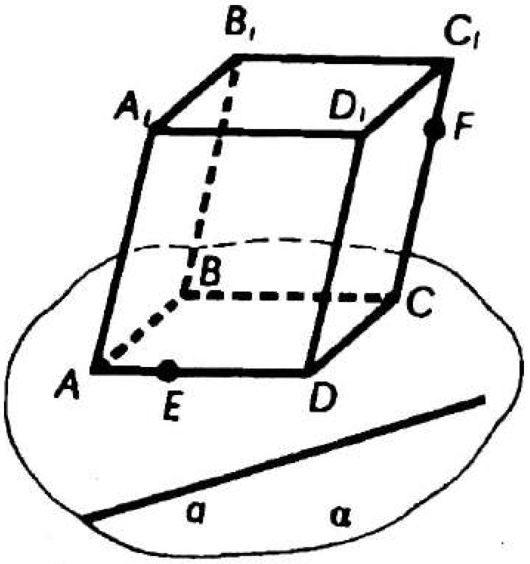
2. α һәм β яссылыклары параллель, $a \parallel a_1$ (рәс. 53). *a* турысы α һәм β яссылыкларын тиңдәшле рәвештә — *A* һәм *B* нокталарында, ә a_1 турысы α яссылыгын A_1 ноктасында кисеп үтә. a_1 нең β яссылыгы белән кисешү ноктасын төзегез. Аңлатып бирегез.



Рәс. 53

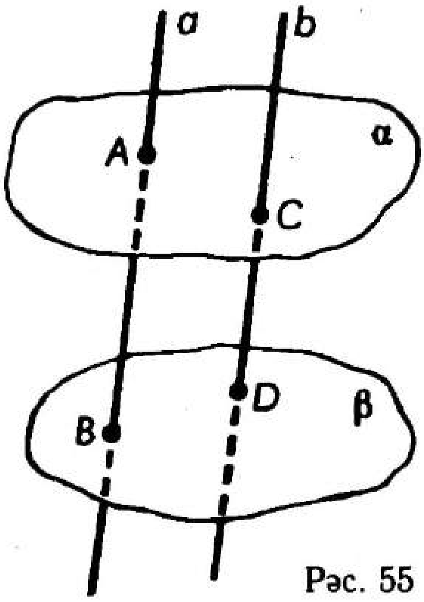
3. *DABC* тетраэдрында $\angle DBA = \angle DBC = 90^\circ$, $DB = 6$, $AB = BC = 8$, $AC = 12$. Тетраэдрның *DB* ның уртасы аша *ADC* яссылыгына параллель үтүче яссылык белән кисемен төзегез. Кисемнең мәйданын табыгыз.

4*. Параллелепипедның *E* һәм *F* нокталары аша *a* турысына параллель үтүче яссылык белән кисемен төзегез (рәс. 54).



Рәс. 54

1. AA_1 һәм BB_1 медианалары α яссылыгына параллель булган ABC өчпочмагы α яссылыгында ятмый. Өчпочмакның B һәм C түбәләре аша α яссылыгын тиңдәшле рәвештә E һәм F нокталарында кисүче параллель турылар үткәрелгән. $ECBF$ ның параллелограмм икәнен исбатлагыз.

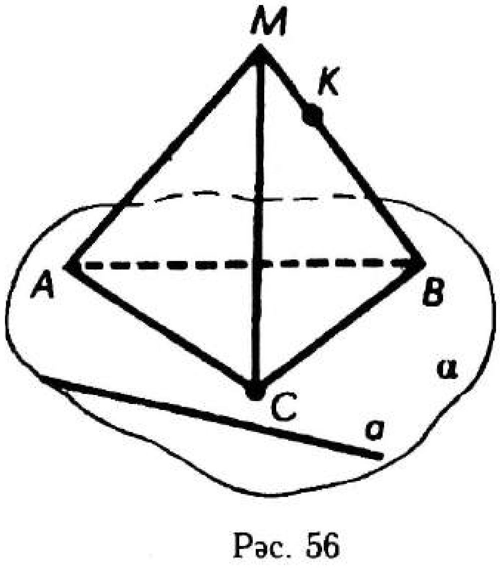


Рәс. 55

2. α һәм β яссылыклары параллель (рәс. 55). a турысы α һәм β яссылыкларын тиңдәшле рәвештә — A һәм B нокталарында, ә b турысы C һәм D нокталарында кисеп үтә. a һәм b турыларының үзара торышын табыгыз. Аңлатып бирегез.

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедының барлык кырлары да — ягы a га тигез булган квадратлар. AD кабыргасының уртасы аша DA_1B_1 яссылыгына параллель яссылык үткәрелгән. Кисемнең периметрын табыгыз.

4*. Тетраэдрның C һәм K нокталары аша a турысына параллель үтүче яссылык белән кисемен төзегез (рәс. 56).

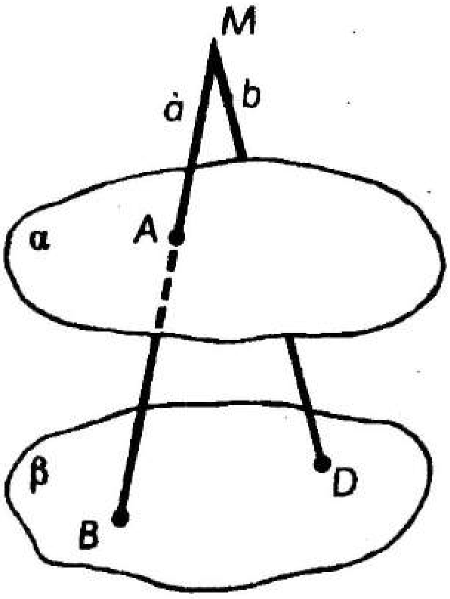


Рәс. 56

К-2 3нче вариант

1. $ABCD$ һәм $EBCF$ турыпочмаклыклары төрле яссылыкларда яталар һәм уртак BC ягына ия. a турысы AD га параллель һәм ABE һәм DCF яссылыкларын тиңдәшле рәвештә P һәм H нокталарында кисеп үтә. $PBCH$ ның параллелограмм икәнен исбатлагыз.

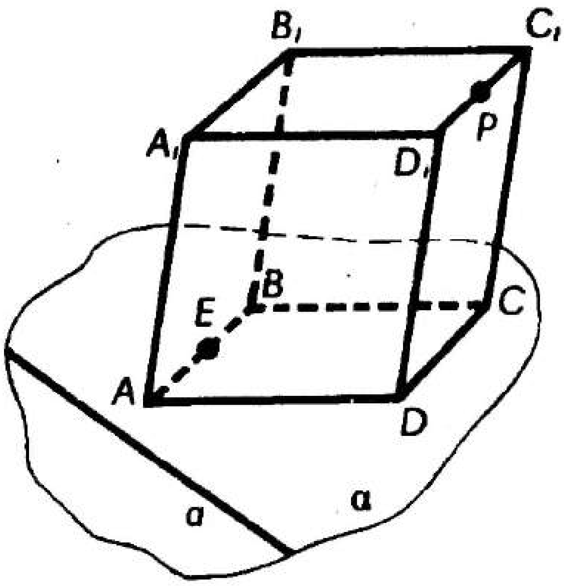
2. α һәм β яссылыклары параллель (рәс. 57). a һәм b турылары M ноктасында кисешәләр. a турысы α һәм β яссылыкларын тиңдәшле рәвештә — A һәм B нокталарында, b турысы β яссылыгын D ноктасында кисеп үтә. b турысының α яссылыгы белән кисешү ноктасын төзегез.



Рәс. 57

3. $DABC$ тетраэдрында M ноктасы — AC ның уртасы, $DB = 6$, $MD = 10$, $\angle DBM = 90°$. Тетраэдрның DC кабыргасының уртасы аша DMB яссылыгына параллель үтүче яссылык белән кисемен төзегез, һәм кисемнең мәйданын табыгыз.

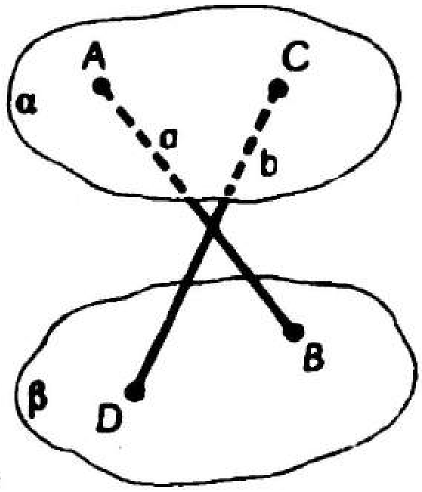
4*. Параллелепипедның E һәм P нокталары аша a турысына параллель үтүче яссылык белән кисемен төзегез (рәс. 58).



Рәс. 58

1. $ABCD$ трапециясе (AD һәм BC — нигезләре) α яссылыгыннан читтә урнашкан. Трапециянең диагональләре α яссылыгына параллель. A һәм B түбәләре аша α яссылыгын тиңдәшле рәвештә E һәм F нокталарында кисүче параллель турылар үткәрелгән. $EABF$ның параллелограмм икәнен исбатлагыз.

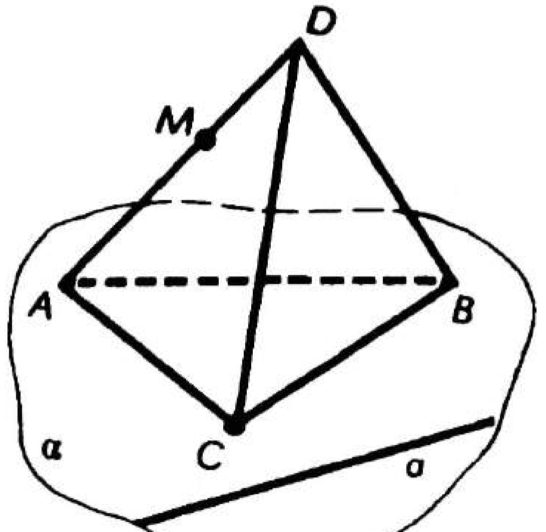
2. α һәм β яссылыклары параллель (рәс. 59). a турысы α һәм β яссылыкларын тиңдәшле рәвештә — A һәм B нокталарында, ә b турысы C һәм D нокталарында кисеп үтә. a һәм b турыларының үзара торышы нинди? Аңлатып бирегез.



Рәс. 59

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — барлык кырлары турыпочмаклыклар булган параллелепипед, $AD = 4$, $DC = 8$, $CC_1 = 6$. Параллелепипедның DC кабыргасының уртасы аша AB_1C_1 яссылыгына параллель үтүче яссылык белән кисемен төзегез һәм кисемнең мәйданын табыгыз.

4*. Тетраэдрның C һәм M нокталары аша a турысына параллель үтүче яссылык белән кисемен төзегез (рәс. 60).



Рәс. 60

К-3 1 нче вариант

1. ABC өчпочмагында $AC = CB = 10$ см, $\angle A = 30°$, BK — өчпочмак яссылыгына төшерелгән перпендикуляр һәм $5\sqrt{6}$ см га тигез. K ноктасыннан AC га кадәр ераклыкны табыгыз.

2. M ноктасы ACB тигезьянлы турыпочмаклы өчпочмагының ($\angle C = 90°$)барлык түбәләреннән тигез ераклыкта, $AC = BC = 4$ см. M ноктасыннан өчпочмак яссылыгына кадәр ераклык $2\sqrt{3}$ см га тигез.

1) AMB яссылыгының ABC яссылыгына перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

2) BMC яссылыгы ABC яссылыгы белән нинди почмак төзи?

3) MC белән ABC яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

3*. AC ягының уртасы — E ноктасыннан BMC яссылыгына кадәр ераклыкны табыгыз.

К-3 2 нче вариант

1. ABC өчпочмагының AC ягы аша B түбәсеннән 4 см ераклыкта α яссылыгы үткәрелгән, $AC = BC = 8$ см, $\angle ABC = 22°30'$. ABC һәм α яссылыклары арасындагы почмакны табыгыз.

2. $ABCD$ — ягы 4 см га тигез квадрат. AMB өчпочмагы белән квадратның AB ягы уртак, $AM = BM = 2\sqrt{6}$ см. Өчпочмак һәм квадрат яссылыклары үзара перпендикуляр.

1) $BC \perp AM$ икәнен исбатлагыз.

2) MC белән квадрат яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

3*. A ноктасыннан DMC яссылыгына кадәр ераклыкны табыгыз.

К-3 3 нче вариант

1. $ABCD$ — ягы 4 см га тигез ромб, $\angle ADC = 150°$, BM — ромб яссылыгына перпендикуляр һәм $2\sqrt{3}$ см га тигез. M ноктасыннан AD га кадәр ераклыкны табыгыз.

2. M ноктасы ягы 4 см га тигез булган ABC төзек өчпочмагының барлык якларыннан тигез ераклыкта. M ноктасыннан ABC яссылыгына кадәр ераклык 2 см га тигез.

1) AMO яссылыгының BMC яссылыгына перпендикуляр икәнен исбатлагыз (O — M ноктасыннан ABC яссылыгына төшерелгән перпендикулярның нигезе).

2) BMC яссылыгы белән ABC яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

3) MC белән ABC яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

3*. E ноктасы AC да ята, өстәвенә $AE : EC = 2 : 1$. E ноктасыннан BMC яссылыгына кадәр ераклыкны табыгыз.

К-3 4 нче вариант

1. $ABCD$ ромбының AD ягы аша BC дан $3\sqrt{3}$ см ераклыкта α яссылыгы үткәрелгән. Ромбның ягы 12 см, $\angle BCD = 30°$. Ромб яссылыгы белән α яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

2. ACB — турыпочмаклы өчпочмак ($\angle C = 90°$), $AC = CB = 3$ см. AMC өчпочмагы ACB өчпочмагы белән уртак AC ягына ия, $AM = CM = \sqrt{6}$ см. Өчпочмакларның яссылыклары үзара перпендикуляр.

1) $MC \perp BC$ икәнен исбатлагыз.

2) MB белән ABC яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

3*. AB ның уртасы — E ноктасыннан BMC яссылыгына кадәр ераклыкны табыгыз.

К-4 1 нче вариант

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедының нигезендә ягы a га, BAD почмагы $60°$ ка тигез булган $ABCD$ ромбы ята. BC_1D яссылыгы нигез яссылыгы белән $60°$ лы почмак төзи. Параллелепипедның тулы өслеге мәйданын табыгыз.

2. $DABC$ пирамидасының нигезендә ABC турыпочмаклы өчпочмагы ята, $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $BC = 10$. Пирамиданың ян кабыргалары нигез яссылыгына тигез авышкан. Пирамиданың биеклеге 5 кә тигез. Пирамиданың ян өслеген табыгыз.

3*. Югарыда күрсәтелгән пирамиданың AC һәм DB турылары арасындагы почмакны табыгыз.

К-4 2 нче вариант

1. Туры параллелепипедның нигезе булып яклары 3 см һәм 5 см булган параллелограмм хезмәт итә. Параллелограммның кысынкы почмагы $60°$ ка тигез. Зуррак диагональ кисеменең мәйданы 63 см^2. Параллелепипедның тулы өслеге мәйданын табыгыз.

2. $MABCD$ пирамидасының нигезендә $ABCD$ ромбы ята, $AC = 8$, $BD = 6$. Пирамиданың биеклеге 1 гә тигез. Нигезе янындагы барлык икекырлы почмаклары да тигез. Пирамиданың тулы өслеге мәйданын табыгыз.

3*. Югарыда күрсәтелгән пирамидада BMC һәм DMC кырлары арасындагы почмагын табыгыз.

К-4 3 нче вариант

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ туры параллелепипедының нигезендә $BD \perp AB$, $AB = 3$ см, $BD = 4$ см булган $ABCD$ параллелограммы ята. AB_1C_1 яссылыгы нигез яссылыгы белән 45° лы почмак төзи. Параллелепипедның тулы өслеге мәйданын табыгыз.

2. $MABCD$ пирамидасының нигезендә ягы 12 гә тигез булган квадрат ята. MBA һәм MBC кырлары нигез яссылыгына перпендикуляр. Пирамиданың биеклеге 5 кә тигез. Пирамиданың тулы өслеге мәйданын табыгыз.

3*. Югарыда күрсәтелгән пирамидада BC һәм MD турылары арасындагы ераклыкны табыгыз.

К-4 4 нче вариант

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ туры параллелепипедының нигезе булып $ABCD$ параллелограммы хезмәт итә, $AD = 2$, $DC = 2\sqrt{3}$, $\angle A = 30°$. Зуррак диагонале нигез яссылыгы белән 45° лы почмак төзи. Параллелепипедның ян өслеге мәйданын табыгыз.

2. $MABC$ пирамидасының нигезендә катетлары $AC = 8$ см, $BC = 6$ см булган ABC турыпочмаклы өчпочмагы ята. Пирамиданың биеклеге $3\sqrt{5}$ см, нигезе янындагы икекырлы почмаклары үзара тигез. Пирамиданың тулы өслеге мәйданын табыгыз.

3*. Югарыда күрсәтелгән параллелепипедта A_1C белән DD_1C_1C кыры яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

К-5 1 нче вариант

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Рәсемдә түбәндәге векторларга тигез векторларны сурәтләгез.

1) $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{DA_1} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BA}$;

2) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{B_1C_1}$.

2. $DABC$ тетраэдрында M — BDC кыры медианаларының кисешү ноктасы, E — AC ның уртасы. $\overrightarrow{EM}$ векторын $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{AD}$ векторлары буйлап таркатыгыз.

3. Коллинеар булмаган өч вектор: $\vec{a}$, $\vec{b}$ һәм $\vec{c}$ бирелгән. p һәм q ның $\vec{m} = p\vec{a} + q\vec{b} + 8\vec{c}$ һәм $\vec{h} = \vec{a} + p\vec{b} + q\vec{c}$ векторлары коллинеар булырдай кыйммәтләрен табыгыз.

4*. $DABC$ тетраэдрында M һәм H нокталары — тиңдәшле рәвештә AD һәм BC кабыргаларының урталары. Векторлардан файдаланып, AB, HM һәм DC турыларының бер яссылыкка параллель икәнен исбатлагыз.

К-5 2 нче вариант

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Рәсемдә түбәндәге векторларга тигез векторларны сурәтләгез.

1) $\overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{B_1A}$;

2) $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CB_1}$.

2. $DABC$ тетраэдрында E ноктасы — AD кабыргасының уртасы, ә M ноктасы — BDC кыры медианаларының кисешү ноктасы. $\overrightarrow{EM}$ векторын $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ һәм $\overrightarrow{AD}$ векторлары буйлап таркатыгыз.

3. $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{h} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ һәм $\vec{p} = 8\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ векторларының компланар икәнен исбатлагыз.

4*. $DABC$ тетраэдрында M һәм K нокталары — тиңдәшле рәвештә AB һәм CD ның урталары. MC, MD, NA һәм NB кисемтәләренең урталары параллелограммның түбәләре икәнен исбатлагыз.

К-5 3нче вариант

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Рәсемдә түбәндәге векторларга тигез векторларны сурәтләгез:

1) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{D_1A_1}$;

2) $\overrightarrow{D_1C_1} - \overrightarrow{A_1B}$.

2. $DABC$ тетраэдрында E ноктасы — DB ның уртасы, ә M ноктасы — ABC кыры медианаларының кисешү ноктасы. $\overrightarrow{EM}$ векторын $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ һәм $\overrightarrow{DC}$ векторлары буйлап таркатыгыз.

3. Коллинеар булмаган өч вектор: $\vec{a}$, $\vec{b}$ һәм $\vec{c}$ бирелгән. k ның $\vec{m} = k\vec{a} + k^2\vec{b} + 2\vec{c}$ һәм $\vec{n} = \vec{a} + k\vec{b} + \vec{c}$ векторлары коллинеар булырдай кыйммәтен табыгыз.

4*. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында E һәм F нокталары — BD һәм C_1C кисемтәләренең урталары. Векторлардан файдаланып, BC_1, EF һәм DC турыларының бер үк яссылыкка параллель икәнен исбатлагыз.

К-5 4 нче вариант

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Рәсемдә түбәндәге векторларга тигез векторларны сурәтләгез:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$;

2) $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{AB_1}$.

2. $DABC$ тетраэдрында M ноктасы — ACD кыры медианаларының кисешү ноктасы, ә K — AB ның уртасы. $\overrightarrow{KM}$ векторын $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ һәм $\overrightarrow{BD}$ векторлары буйлап таркатыгыз.

3. $\vec{m} = \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$ һәм $\vec{n} = 2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ һәм $\vec{p} = 3\vec{a} - 4\vec{b} - 5\vec{c}$ векторларының компланар икәнен исбатлагыз.

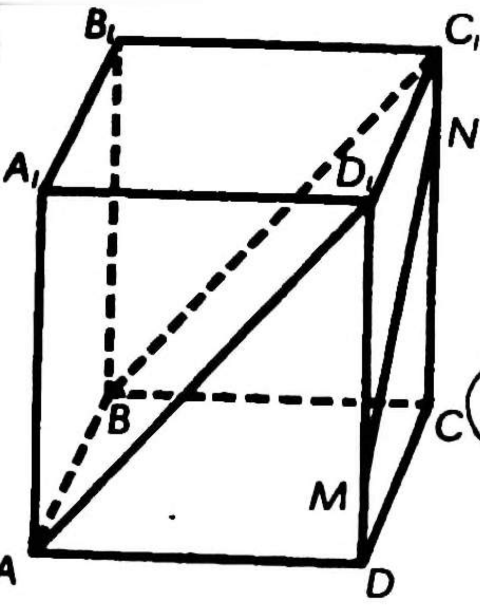
4*. $ABCD$ параллелограммы һәм ирекле рәвештә алынган $A_1B_1C_1D_1$ дүртпочмагы пространствода урнашкан. A_1BB_1, B_1CC_1, C_1DD_1 һәм A_1AD_1 өчпочмаклары медианаларының кисешү ноктадары параллелограмм түбәләре икәнен исбатлагыз.

МАТЕМАТИК ДИКТАНТЛАР

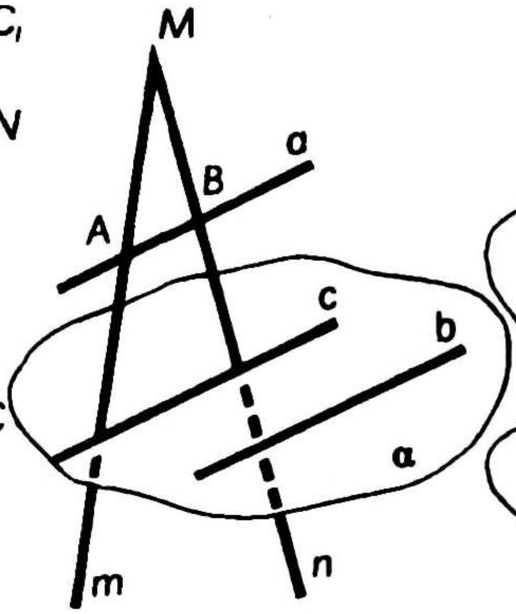
МД—1

1 НЧЕ ВАРИАНТ

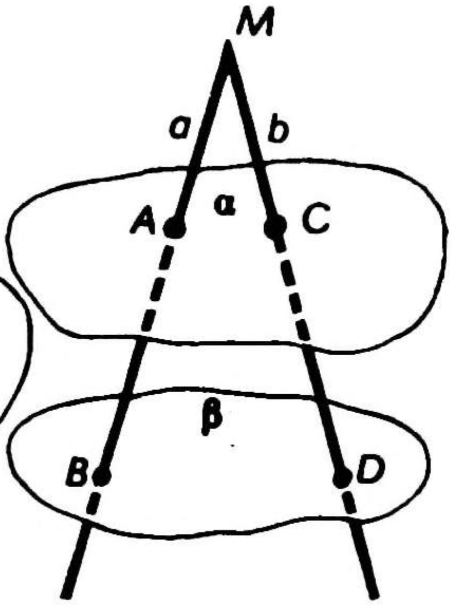
1. Пространстводагы өч нокта нинди очракта бу нокталар аша үтүче яссылыкның торышын билгели алмый?
2. Төрле ике яссылыкның бер генә уртак ноктасы булуы мөмкинме?
3. M ноктасы a турысында ятмый. M ноктасы аша a турысын кисүче турылар үткәрелә. Бу турылар бер яссылыкта ятамы?
4. Турылар үзара ничек урнашкан (рәс. 61):



Рәс. 61



Рәс. 62



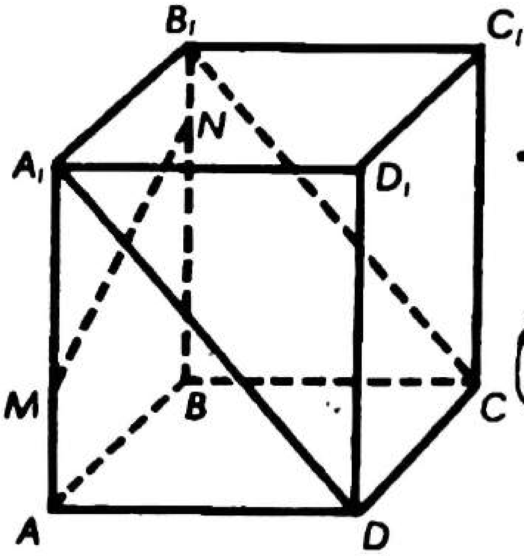
Рәс. 63

1) AD_1 һәм MN; 2) AD_1 һәм BC_1; 3) MN һәм DC?

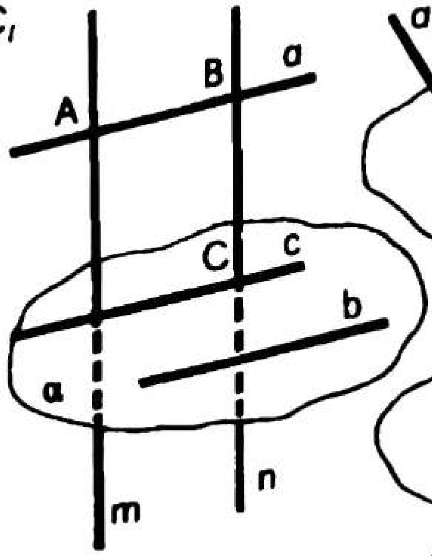
5. a һәм b турылары c турысы белән чалышма. a һәм b турыларының кисешүе мөмкинме?
6. a турысы α яссылыгына параллель. α яссылыгында a турысына параллель булмаган турылар бармы? Булса, алар үзара ничек урнашкан?
7. m һәм n турылары M ноктасында кисешәләр (рәс. 62). $A \in m$, $B \in n$, b исә α яссылыгында ята, $a \| b$. b һәм c турылары үзара ничек урнашкан?
8. ABC өчпочмагы һәм α яссылыгы бирелгән, $AB \| \alpha$, $AC \| \alpha$. BC турысы белән α яссылыгының үзара торышы нинди?
9. α һәм β яссылыклары параллель (рәс. 63). M ноктасында кисешүче a һәм b турылары α яссылыгын — A һәм C нокталарында, ә β ны B һәм D нокталарында кисеп үтә, $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$, $\frac{MC}{MD}$ чагыштырмасын табыгыз.
10. α яссылыгы параллелепипедның ян кабыргаларын гына кисеп үтә. Кисемнең төрен билгеләгез.

2 НЧЕ ВАРИАНТ

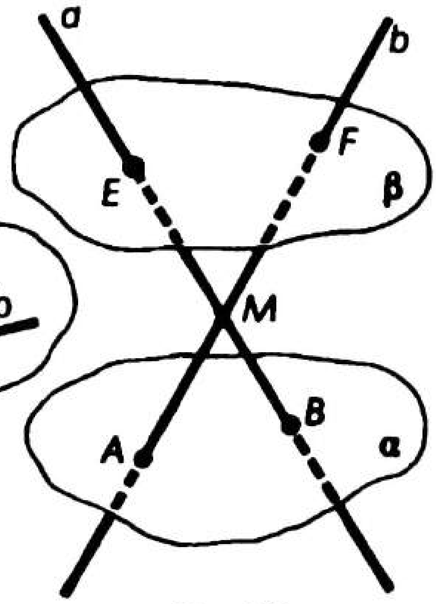
1. Ике яссылыкның бер турыда ятмаган өч уртак ноктасы булса, аларның үзара торышы турында нәрсә әйтеп була?
2. Төрле ике яссылыкның ике генә уртак ноктасы булуы мөмкинме?
3. a һәм b турылары M ноктасында кисешәләр. M ноктасы аша үтмәүче c турысы a һәм b турыларын кисеп үтә. Бу турылар барысы да бер яссылыкта ятамы?
4. Турылар үзара ничек урнашкан (рәс. 64):



Рәс. 64



Рәс. 65



Рәс. 66

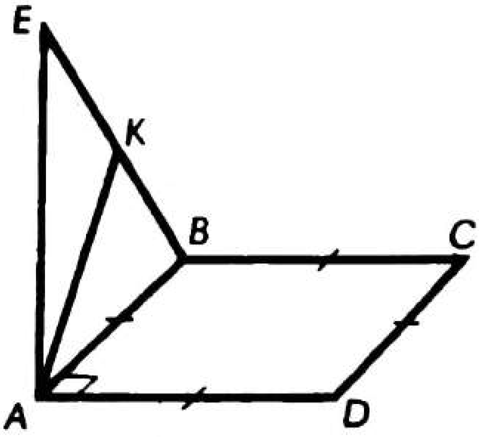
1) A_1D һәм MN; 2) A_1D һәм B_1C; 3) MN һәм A_1B_1?

5. a һәм b турылары c турысы белән чалышма. a һәм b турыларының параллель булуы мөмкинме?
6. Ике туры бер үк яссылыкка параллель. Бу турылар үзара параллель дип раслап буламы? Булса, аларның үзара торышы нинди?
7. m һәм n турылары параллель (рәс. 65). A һәм B нокталары тиңдәшле рәвештә m һәм n турыларында ята; b исә α яссылыгында ята, $a \| b$. b һәм c турыларының үзара торышы нинди?
8. $ABCD$ дүртпочмагы һәм α яссылыгы бирелгән. Аның диагональләре AC һәм BD α яссылыгына параллель. AB һәм α яссылыгы үзара ничек урнашкан?
9. α һәм β яссылыклары параллель (рәс. 66). M ноктасында кисешүче a һәм b турылары α яссылыгын тиңдәшле рәвештә — B һәм A нокталарында, ә β яссылыгын E һәм F нокталарында кисеп үтәләр, $\frac{EM}{MF} = \frac{2}{5}$. $\frac{MB}{MA}$ чагыштырмасын табыгыз.
10. α яссылыгы параллелепипедның нигез диагонале һәм өске нигезенең бер ягының уртасы аша үтә. Кисемнең төрен билгеләгез.

МД—2

1 НЧЕ ВАРИАНТ

1. $AB \perp \alpha$, $CD \perp \alpha$, $B \in \alpha$, $D \in \alpha$, $AB = CD$. AC турысы белән α яссылыгы үзара ничек урнашкан?
2. Яссылыкка ике тигез авышма үткәрелгән. Аларның проекцияләре тигезме?
3. M ноктасы катетлары 6 см һәм 8 см булган турыпочмаклы өчпочмакның барлык түбәләреннән тигез ераклыкта. M ноктасыннан өчпочмак яссылыгына кадәр ераклык 12 см га тигез. M ноктасыннан өчпочмак түбәләренә кадәр ераклыкны табыгыз.
4. Турыпочмаклы параллелепипедның нигезендә ягы a га тигез квадрат ята. Параллелепипедның ян кабыргасыннан аның белән чалышма булган диагоналенә кадәр ераклык ... тигез.
5. $ABCD$ — квадрат (рәс. 67). AE квадрат яссылыгына перпендикуляр, $K \in EB$. BC белән AK арасындагы почмак нәрсәгә тигез?
6. ABC өчпочмагында $AB = 10$, $\angle A = 30°$, $BD \perp ABC$, $BD = 12$. D ноктасыннан AC га кадәр ераклык ... тигез.
7. Турыпочмаклы параллелепипедның нигезе булып ягы 4 кә тигез квадрат хезмәт итә. Параллелепипедның диагонале 8 гә тигез. Диагональ белән ян кыры арасындагы почмагы ... тигез.

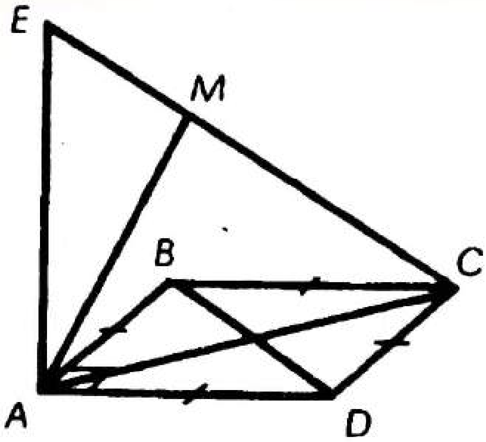


Рәс. 67

8. M ноктасы ягы 8 см га тигез булган $ABCD$ квадратының барлык якларыннан тигез ераклыкта урнашкан. M ноктасыннан квадрат яссылыгына кадәр ераклык 4 см га тигез. MCD яссылыгы белән квадрат яссылыгы арасындагы почмак ... тигез.
9. a турысы һәм α яссылыгы β яссылыгына перпендикуляр. a турысы белән α яссылыгының үзара торышы нинди?
10. MAB өчпочмагы белән $ABCD$ квадраты уртак AB ягына ия һәм аларның яссылыклары үзара перпендикуляр. MAD почмагы ... тигез.

2 НЧЕ ВАРИАНТ

1. $AB \perp \alpha$, $CD \parallel AB$ ($B \in \alpha$, $D \in \alpha$), $E \in \alpha$, $\angle ECD = 40°$. Ул вакытта $\angle CED$ ... тигез.
2. Яссылыкка үткәрелгән ике авышманың проекцияләре тигез. Авышмалар үзләре тигезме?
3. D ноктасы төзек өчпочмакның барлык түбәләреннән тигез ераклыкта һәм аның яссылыгыннан 3 см ераклыкта урнашкан. Өчпочмакның биеклеге 6 см га тигез. D ноктасыннан өчпочмакның түбәсенә кадәр ераклык ... тигез.



Рәс. 68

4. Турыпочмаклы параллелепипедның нигезендә ягы a га тигез булган квадрат ята. Параллелепипедта капма-каршы кырларының чалышма диагональләре арасындагы ераклык ... тигез.
5. $ABCD$ — квадрат (рәс. 68). AE квадрат яссылыгына перпендикуляр, $M \in EC$. BD һәм AM арасындагы почмак ... тигез.
6. ABC өчпочмагында $AB = 16$ см, $\angle A = 30^\circ$. BK өчпочмак яссылыгына перпендикуляр. K ноктасыннан AC га кадәр ераклык 17 см га тигез булса, BK ны табыгыз.
7. Турыпочмаклы параллелепипедның нигезендә квадрат ята. Параллелепипедның диагонале 10 см га тигез һәм ян кыр яссылыгы белән 60° лы почмак төзи. Нигезенең ягын табыгыз.
8. D ноктасы ABC төзек өчпочмагының барлык якларыннан тигез ераклыкта. D ноктасыннан өчпочмак яссылыгына кадәр ераклык $2\sqrt{3}$ кә тигез. Өчпочмакны камаучы әйләнәнең радиусы 4 кә тигез. CDB яссылыгы белән өчпочмак яссылыгы арасындагы почмак ... тигез.
9. Ике яссылык өченче яссылыкка перпендикуляр. Бу яссылыкларның өченче яссылык белән кисешү сызыклары параллель. Әлеге яссылыкларның үзара торышы нинди?
10. ABC турыпочмаклы өчпочмагы ($\angle C = 90^\circ$) белән CMB өчпочмагы уртак BC ягына ия. Өчпочмак яссылыклар үзара перпендикуляр. ACM почмагы ... тигез.

МД—3

1 НЧЕ ВАРИАНТ

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дүртпочмаклы төзек призмасында нигезенең ягы 4 см га, ә ян кабыргасы 5 см га тигез. AA_1 кабыргасы һәм C түбәсе аша үтүче кисемнең мәйданын табыгыз.
2. Өчпочмаклы төзек призмада нигезенең ягы 3 см га тигез, ә ян кырының диагонале нигез яссылыгы белән 60° лы почмак төзи. Призманың ян өслеге мәйданы ... тигез.
3. Авыш параллелепипедның нигезе булып квадрат хезмәт итә. Капма-каршы ике ян кыры нигез яссылыгына перпендикуляр. Параллелепипедның барлык кабыргалары да 4 см га тигез. Һәр авыш ян кырының мәйданын табыгыз.

4. $ABCA_1B_1C_1$ өчпочмаклы авыш призмасының нигезе булып ягы a га тигез төзек өчпочмак хезмәт итә. Ян кабыргалары b га тигез. $\angle A_1AC = \angle A_1AB$. CC_1B_1B кырының мәйданы ... тигез.
5. Өчпочмаклы авыш призманың ян кабыргалары 10 см га тигез. Ике ян кырының мәйданнары 30 $см^2$ һәм 40 $см^2$ га тигез, ә алар арасындагы почмагы туры. Призманың ян өслеге мәйданы ... тигез.
6. Дүртпочмаклы төзек пирамидада нигез диагонале һәм аның белән чалышма булган ян кабыргасы арасындагы почмак ... тигез.
7. Дүртпочмаклы төзек пирамидада капма-каршы ян кабыргалар арасындагы почмак 40° ка тигез. Ян кырларының нигез яссылыгына авышлык почмагын табыгыз.
8. Пирамиданың нигезендә өчпочмак ята. Аның ягы 8 см га тигез, ә бу якка каршы яткан почмагы 150°. Ян кабыргалары нигез яссылыгына 45° лы почмак ясап авышкан. Пирамиданың биеклеге ... тигез.
9. Пирамиданың нигезендә нигезләре 2 см һәм 8 см га тигез булган трапеция ята. Пирамиданың ян кырлары нигез яссылыгына тигез авышкан. Бер ян кырының биеклеге 10 см га тигез. Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.
10. $MABCD$ пирамидасының нигезе булып ягы a га тигез квадрат хезмәт итә. MAB кыры — яссылыгы нигез яссылыгына перпендикуляр булган төзек өчпочмак. MAD һәм MBC кырларының мәйданнары ... тигез.

2 НЧЕ ВАРИАНТ

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дүртпочмаклы төзек призмасының нигезенең ягы 3 см га, ә ян кабыргасы 4 см га тигез. Нигезенең AD ягы һәм C_1 түбәсе аша үтүче кисемнең мәйданын табыгыз.
2. Өчпочмаклы төзек призманың ян кабыргасы 4 см га тигез, ә ян кырының диагонале нигез яссылыгы белән 45° лы почмак төзи. Призманың ян өслеге мәйданы ... тигез.
3. Авыш параллелепипедның нигезендә квадрат ята. Капма-каршы ике ян кыры нигез яссылыгына перпендикуляр. Параллелепипедның барлык кабыргалары үзара тигез. Авыш ян кырының мәйданы 25 $см^2$. Параллелепипедның кабыргасының озынлыгы ... тигез.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ авыш параллелепипедының нигезе булып ягы a га тигез квадрат хезмәт итә. Ян кабыргалары b га тигез. A түбәсе аскы нигезенең барлык түбәләреннән дә тигез ераклыкта. BB_1D_1D диагональ кисеменең мәйданы ... тигез.
5. Өчпочмаклы авыш призманың ян кабыргасы 5 см озынлыкта. Ике ян кырының мәйданнары 20 $см^2$ га, алар арасындагы почмагы 60° ка тигез. Призманың ян өслеге мәйданы ... тигез.
6. Өчпочмаклы төзек пирамидада чалышма кабыргалары арасындагы почмак ... тигез.

7. Дүртпочмаклы төзек пирамиданың ян кырлары нигезгә 50° лы почмак ясап авышкан. Пирамиданың капма-каршы ян кырлары арасындагы почмагы ... тигез.
8. Пирамиданың нигезендә ягы 6 см, бу якка каршы яткан почмагы 30° булган өчпочмак ята. Ян кабыргалары нигезгә 60° лы почмак ясап авышкан. Ян кабыргасының озынлыгы ... тигез.
9. Пирамиданың нигезендә ян-яклары 2 см һәм 4 см га тигез трапеция ята. Пирамиданың ян кырлары нигез яссылыгына тигез авышкан. Бер ян кырының биеклеге 5 см. Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.
10. $MABCD$ пирамидасының нигезе булып ягы 6 см га тигез квадрат хезмәт итә. MB кабыргасы нигез яссылыгына перпендикуляр. Тигез ян кабыргалары 8 см озынлыкта. Авыш ян кырларының мәйданы ... тигез.

МД—4

1 НЧЕ ВАРИАНТ

1. $DABC$ — өчпочмаклы төзек пирамида. Нигезенең ягы $\sqrt{3}$ кә тигез. Ян кабыргалары нигезгә 60° лы почмак ясап авышкан. $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}|$ ын табыгыз.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының кабыргасы 1 гә тигез. $|\overrightarrow{DC_1} - \overrightarrow{DA_1}|$ ын табыгыз.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. A_1C диагонале B_1D ны M ноктасында кисеп үтә, $\overrightarrow{B_1D} = x\overrightarrow{DM}$. x ны табыгыз.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. $\overrightarrow{AB_1}$ һәм $\overrightarrow{AC}$ векторлары белән компланар, ә башлангычы һәм ахыры параллелепипедның түбәләрендә булган нинди дә булса векторны күрсәтегез.
5. $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$. AC һәм BD турыларының чалышма булуы мөмкинме?
6. $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{n} = 2\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$, $\vec{p} = 3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{k} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$. Компланар векторларның өчлеген күрсәтегез.
7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}$ не табыгыз.
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. D_1C диагонале C_1D ны M ноктасында кисә. $\overrightarrow{AM}$ векторын $\overrightarrow{AD_1}$ һәм $\overrightarrow{AC}$ векторлары аша күрсәтегез.
9. $PABCD$ — пирамида, $ABCD$ — параллелограмм, $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{PC} = \vec{c}$. $\overrightarrow{PD} = \vec{x}$ векторын $\vec{a}$, $\vec{b}$ һәм $\vec{c}$ векторлары аша күрсәтегез.
10. $DABC$ өчпочмаклы төзек пирамидасында DO кисемтәсе — биеклек. $\overrightarrow{DO}$ векторын $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ һәм $\overrightarrow{DC}$ векторлары буйлап таркатыгыз.

2 НЧЕ ВАРИАНТ

1. $MABC$ пирамидасының нигезендә ACB турыпочмаклы өчпочмагы ($\angle C = 90^\circ$) ята, $AC=6$, $BC=8$. Пирамиданың ян кабыргалары нигезгә 60° лы почмак ясап авышкан. $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CB}|$ ын табыгыз.
2. $ABCA_1B_1C_1$ өчпочмаклы төзек призмасында нигезенең ягы 1 гә тигез, E ноктасы — A_1C_1 нең уртасы. $|\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CB_1}|$ ын табыгыз.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, A_1C B_1D ны M ноктасында кисеп үтә, $\overrightarrow{A_1C} = x\overrightarrow{CM}$. x ны табыгыз.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, E һәм F — тиңдәшле рәвештә AD һәм CD нын уртасы. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EF}$ һәм $\overrightarrow{DD_1}$ векторлары компланар булырмы?
5. $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{n} = -\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$, $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{k} = 3\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$. Компланар векторларның өчлеген күрсәтегез.
6. $\overrightarrow{AC} \neq x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$. x һәм y ның барлык кыйммәтләре өчен дә $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{AD}$ коллинеар түгел. AC һәм AD турыларының кисешүе мөмкинме?
7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$—параллелепипед. Табыгыз: $\overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{C_1C}$.
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$—параллелепипед. AB_1 A_1B ны E ноктасында кисеп үтә. $\overrightarrow{DE}$ векторын $\overrightarrow{DB_1}$ һәм $\overrightarrow{DA}$ аша күрсәтегез.
9. $EABCD$ пирамидасының нигезендә $ABCD$ параллелограммы ята. $\overrightarrow{EB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{EC} = \vec{n}$, $\overrightarrow{ED} = \vec{p}$, $\overrightarrow{EA} = \vec{y}$. $\vec{y}$ векторын $\vec{m}$, $\vec{n}$ һәм $\vec{p}$ векторлары аша күрсәтегез.
10. $DABC$ тетраэдрында DE һәм CF кисемтәләре — BDC кырының медианалары. DE CF ны O ноктасында кисеп үтә. $\overrightarrow{AD}$ векторын $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AC}$ һәм $\overrightarrow{AB}$ векторлары аша күрсәтегез.

ҖАВАПЛАР

М—1

Вар. 1. **2.** Әйе, кисешәләр.

Вар. 3. **1.** A, M һәм B нокталары бер турыда ятарга тиеш.

2. 1) EF турысы BC ны — X ноктасында, ә B_1C_1 не Y ноктасында кисеп үтә. Ул вакытта X — EF ның ABC яссылыгы белән, ә Y — $A_1B_1C_1$ яссылыгы белән кисешү ноктасы.

2) FD турысы ADF һәм EFD яссылыкларының кисешү сызыгы була.

3) XD турысы EFD һәм ABC яссылыкларының кисешү сызыгы була.

Вар. 5. **1.** $BO = OC$ шарты үтәлгәндә.

2. AB_1 белән A_1B — X ноктасында, ә BC_1 белән B_1C исә Y ноктасында кисешсеннәр ди. Ул вакытта XY турысы AB_1C һәм A_1C_1B яссылыкларының кисешү сызыгы икәнен исбатларга мөмкин.

Вар. 6. **1.** $AE : EC = 2 : 3$ шарты үтәлгәндә.

2. ME белән PT X ноктасында кисешсен ди. Ул вакытта XK ның PTK һәм MCE яссылыкларының кисешү сызыгы икәнен исбат итәргә мөмкин.

Вар. 7. **1.** BK турысы AC ны — P ноктасында, ә PD исә EFны L ноктасында киссен ди. DK белән LM нын кисешү ноктасы эзләнелгән X ноктасы була. Бу исбатлауны таләп итә.

2. Әгәр $\angle C = 90°$ булса, камаучы әйләнәнең үзәге O ABда ята. Бу туры аша C ноктасы ятмаган яссылык үткәрергә була. Шуңа күрә C ноктасының ABC яссылыгында ятуы мәҗбүри түгел.

Вар. 8. **1.** DM BC ны — L ноктасында, ә AL BE ны P ноктасында киссен ди. AM белән DP ның кисешү ноктасы эзләнелгән Y ноктасы була. Бу исбатлауны таләп итә.

2. Ятмавы да мөмкин.

М—2

Вар. 1. **1.** 1) BC турысы.

2) β яссылыгында яткан һәм C ноктасы аша үтүче, ләкин BC белән тәңгәл килми торган теләсә нинди туры.

3) Андый турылар юк.

Вар. 2. **1.** Андый турылар юк.

2) β яссылыгында яткан һәм C ноктасы аша үтүче, ләкин EF ка параллель булмаган теләсә нинди туры.

3) C ноктасы аша үтүче һәм EF ка параллель туры.

Вар. 4. **2.** Юк, ятмый.

Вар. 5. **1.** EF һәм a, EF һәм b — чалышма турылар, чөнки шулай булмаганда AA_1 һәм BB_1 турылары бер яссылыкта ятар иде, ә моның булуы мөмкин түгел.

Вар. 6. Мәсьәлә 5 нче варианттагы 1 нче мәсьәлә кебек үк чишелә.

Вар. 7. **1.** c һәм a турылары бер яссылыкта яталар һәм кисешмиләр. Әгәр c һәм a турылары X ноктасында кисешәләр дип уйласак, ул вакытта X ноктасының α, β һәм γ яссылыкларының өчесендә дә ятканын җиңел ачыклап була, димәк, ул бу яссылыкларны парлап алгандагы кисешү сызыкларында да ята. Ләкин ул вакытта a һәм b турылары уртак X ноктасына ия булыр иде, ә бу шартка каршы килә. $c \parallel b$ икәнлеге шулай ук исбатлана.

2. A_1F һәм C_1E кисемтәләрен тикшерик; $EF \parallel AC$, чөнки EF — ABC өчпочмагының урта сызыгы. $AC \parallel A_1C_1$ икәнен исбатлау ансат. Моннан $EF \parallel A_1C_1$ икәнлеге килеп чыга. Мондый очракта EFC_1A_1 — нигезләре EF һәм A_1C_1 булган трапеция, өстәвенә $EF : A_1C_1 = 1 : 2$. Трапециянең диагональләре A_1F һәм C_1E K ноктасында кисешсеннәр ди. A_1KC_1 һәм EKF өчпочмакларының охшашлыгыннан

$$A_1K : KF = C_1K : KE = 1 : 2.$$

икәнлеге килеп чыга. Хәзер A_1F һәм B_1M кисемтәләрен карыйк. Нәкъ шулай ук аларның ниндидер K_1 ноктасында кисешкәнен исбатларга мөмкин, өстәвенә

$$A_1K_1 : K_1F = B_1K_1 : K_1M = 1 : 2.$$

Мондый очракта K һәм K_1 нокталары тәңгәл киләләр. Бу раслама шуның белән исбатлана.

Вар. 8. **1.** a турысы һәм M ноктасы аша α яссылыгы үтә. Әгәр бу яссылык b турысын ниндидер X ноктасында кисеп үтсә, ул вакытта XM турысы a га параллель булмаса, ул эзләнгән туры була.

2. CC_1B_1B, AA_1C_1C һәм AA_1B_1B — параллелограммнар, ә F, E һәм M — аларның диагональләренең кисешү нокталары икәнен җиңел исбатлап була, EF — AC_1B өчпочмагының урта сызыгы һәм $EF = \frac{1}{2}AB$. Шуңа охшаш рәвештә, $MF = \frac{1}{2}AC$ һәм $EM = \frac{1}{2}BC$. Моннан өчпочмаклар охшашлыгын өченче билгесе буенча EMF һәм ABC өчпочмаклары охшаш.

М—3

Вар. 2. **1.** $BF : FC = 2 : 3$.

Вар. 3. **1.** b турысы я α яссылыгына параллель, я шул яссылыкта ята.

2. 2) $50°$.

Вар. 4. **2.** 2) $80°$.

Вар. 5. **1.** $PKHM$ дүртпочмагының параллелограмм икәнен исбатларга кирәк.

2. 2) $OO_1 \parallel AA_1$.

3) $60°$.

Вар. 6. **1.** Мәсьәлә 5 нче варианттагы 1 нче мәсьәлә кебек үк чишелә.

2. 2) $KK_1 \parallel BC$.

3) $70°$.

Вар. 7. **1.** ME һәм MF AMD һәм DMC өчпочмакларының медианалары булсын. EMF һәм HMH_1 өчпочмакларын тикшерербез. $\frac{MH}{ME} = \frac{MH_1}{MF} = \frac{2}{3}$. Моннан тыш, бу өчпочмакларда $\angle EMF$ — уртак. Моннан $\triangle EMF \sim \triangle HMH_1$ икәнлеге килеп чыга. Мондый очракта $HH_1 \parallel EF$. EF — ADC өчпочмагының урта сызыгы булганга, $EF \parallel AC$. Шуңа күрә $HH_1 \parallel AC$ һәм HH_1 AMC яссылыгына параллель.

2. MF һәм EF — MFE яссылыгының CDB һәм ABC яссылыклары белән кисешү сызыклары. ADC яссылыгы белән кисешү сызыгы M ноктасы аша үтә һәм AC га параллель. Аның AD белән кисешү ноктасы P булсын. Ул вакытта PE — ADB яссылыгы белән кисешү сызыгы, $PMFE$ — параллелограмм, $\angle EFM$ — AC һәм DB чалышма турылары арасындагы почмак, $EF=5$, $MF=10$. $S = EF \cdot MF \sin \angle EFM$, $25\sqrt{3} = 50 \sin \angle EFM$; $\sin \angle EFM = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\angle EFM = 60°$ (чалышма турылар арасындагы почмак кысынкы яки туры).

Вар. 8. **1.** Әйе, параллельләр.

2. 200. Мәсьәлә 7 нче вариант мәсьәләсе кебек үк чишелә.

М—4

Вар. 3. **2.** AB һәм CD турылары чалышма икән, AD һәм BC турылары да чалышма була. Әгәр $AB \parallel CD$ булса, ул вакытта AD белән BC кисешәләр яки параллель.

Вар. 4. **2.** AC һәм BD — чалышма, кисешүче яки параллель турылар. 3 нче вариантның 2 нче мәсьәләсен кара.

Вар. 5. **1.** 10 см, 12,5 см.

2. Яссылыкларның торышы турында фикер әйтеп булмый.

Вар. 6. **1.** 10 см, 15 см.

2. Турылар кисешергә яки чалышма булырга тиеш.

Вар. 7. **1.** M ноктасы аша AC белән E ноктасында кисешкәнчегә кадәр BB_1 гә параллель туры үткәрәбез. E ноктасы аша AB турысы белән P ноктасында кисешкәнчегә кадәр KB га параллель туры үткәрәбез. P ноктасы аша BB_1 гә параллель туры үткәрәбез. Бу туры күрсәтелгән яссылык белән ABB_1 яссылыгынын кисешү сызыгы икәнен исбатлау авыр түгел.

2. M ноктасы аша үтүче һәм α яссылыгына параллель яссылыкта.

Вар. 8. **1.** 7 нче варианттагы 1 нче мәсьәлә кебек үк чишелә.

М—5

Вар. 1. **2.** $2\sqrt{3}$ см^2.

Вар. 2. **2.** $4\sqrt{3}$ см^2.

Вар. 3. **2.** $4\sqrt{33}$ см^2.

Вар. 4. **1.** 90°. **2.** 48 см^2.

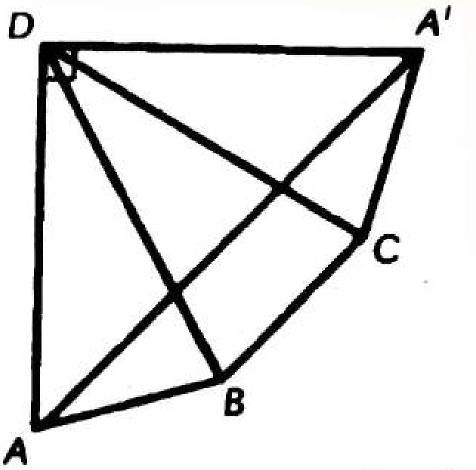
Вар. 5. **2.** Күрсәтелгән кисемтәләрнең һәр икесе параллелограммның диагональләре була, шул ук вакытта бу параллелограммның яклары тетраэдрның тиндәшле кырларының урта сызыклары була. Исбатлау өчен параллелограмм диагональләренең квадратлары суммасы турындагы теоремадан файдаланырга кирәк.

Вар. 6. **2.** Күрсәтелгән турыларның теләсә нинди ике кисемтәсен тикшерегез һәм кисешкәндә аларның шушы (1 : 3) чагыштырмада бүленгәнен исбатлагыз.

Вар. 7. **1.** Мәсьәләне чишү өчен $ABCD$ ның параллелограмм икәнен исбатларга кирәк. Күрсәтелгән кисемтәләр O ноктасында кисешсеннәр ди. AA_1C_1C — параллелограмм, чөнки $AA_1 \parallel CC_1$ һәм $AA_1 = CC_1$. Ул вакытта $A_1O = OC$ һәм $AO = OC_1$. BB_1D_1D — параллелограмм, чөнки $BB_1 \parallel DD_1$ һәм $BB_1 = DD_1$. Ул вакытта $B_1O = OD$ һәм $BO = OD_1$. A_1B_1CD дүртпочмагында $A_1O = OC$ һәм $B_1O = OD$. Мондый очракта A_1B_1CD — параллелограмм

һәм $A_1B_1 \| CD$, ләкин $A_1B_1 \| AB$ һәм шуңа күрә $AB \| CD$. Шундый ук юл белән $BC \| AD$ икәнен исбатларга мөмкин, ул вакытта $ABCD$ — параллелограмм. Шулай булгач, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

2. Тетраэдрның ян өслеге җәелмәсенең сызымын сызарга кирәк (рәс. 69). Иң кыска юл AA' кисемтәсенең озынлыгына тигез. $\angle ADA' = 30° \cdot 3 = 90°$. Ул вакытта $AA' = 3\sqrt{2}$ см.



Рәс. 69

Вар. 8. **1.** BDA_1 һәм AA_1C_1 яссылыклары A_1O турысы буйлап кисешәләр, монда O—$ABCD$ параллелограммы диагональләренең кисешү ноктасы. AC_1 A_1O ны M ноктасында кисеп үтә. Бу AC_1 нең BDA_1 яссылыгы белән кисешү ноктасы була да инде. AC_1 нең A_1C белән кисешү ноктасын P дип билгелик. Ул вакытта AP һәм A_1O — AA_1C өчпочмагының медианалары. Мондый очракта $A_1M : MO = 2 : 1$, ә бу M ноктасы BDA_1 кисеме медианаларының кисешү ноктасы икәнен белдерә.

2. 12 см. Мәсьәлә 7 нче вариантның 2 нче мәсьәләсе кебек үк чишелә.

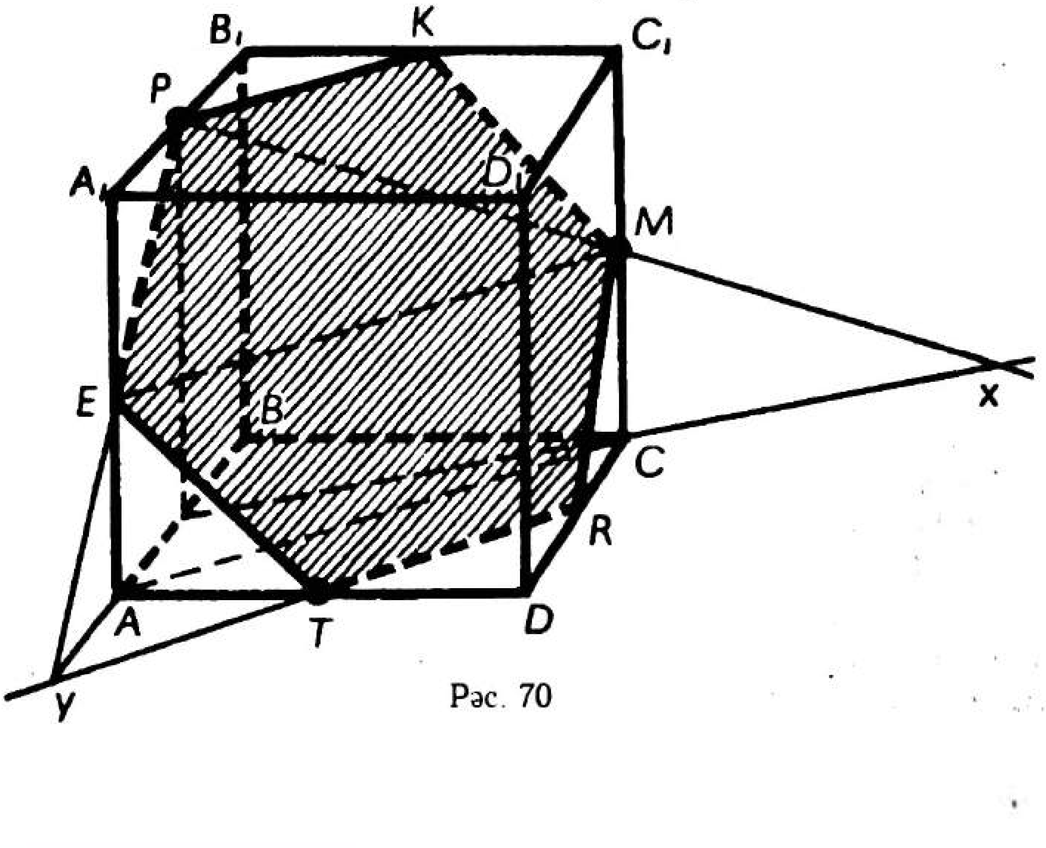
М—6

Вар. 1. **2.** $(10 + 12\sqrt{2})$ см.
Вар. 2. **1.** 15.

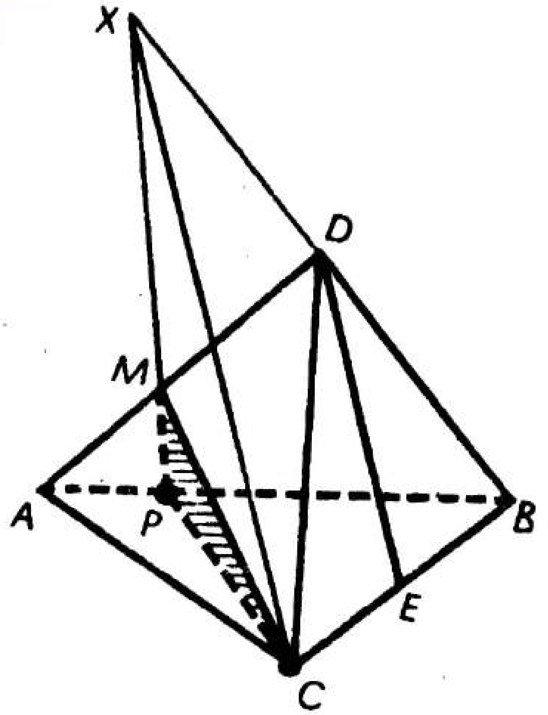
Вар. 3. **1.** $\dfrac{a^2\sqrt{11}}{64}$.

Вар. 4. **1.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{16}$.

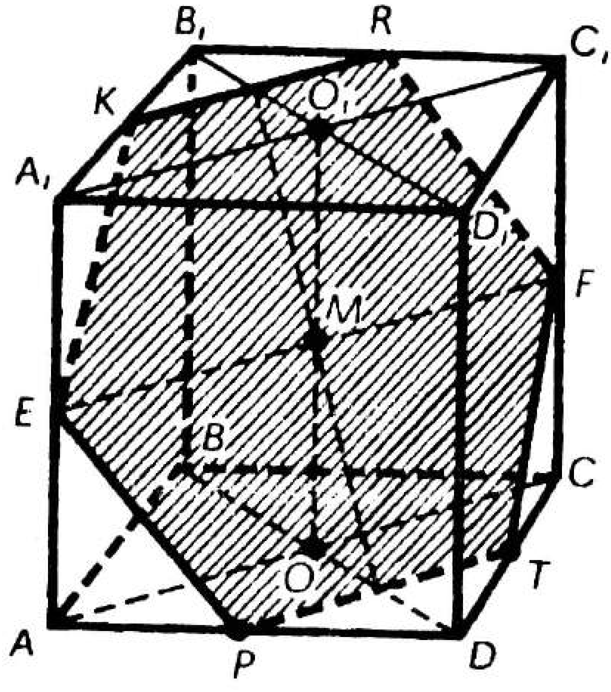
Вар. 5. **1.** Кисемне төзү 70 нче рәсемдә күрсәтелгән. Кисемдә ягы $4\sqrt{2}$ см га тигез булган төзек алтыпочмак килеп чыкканын исбатларга кирәк. Аның мәйданы $48\sqrt{3}$ см².



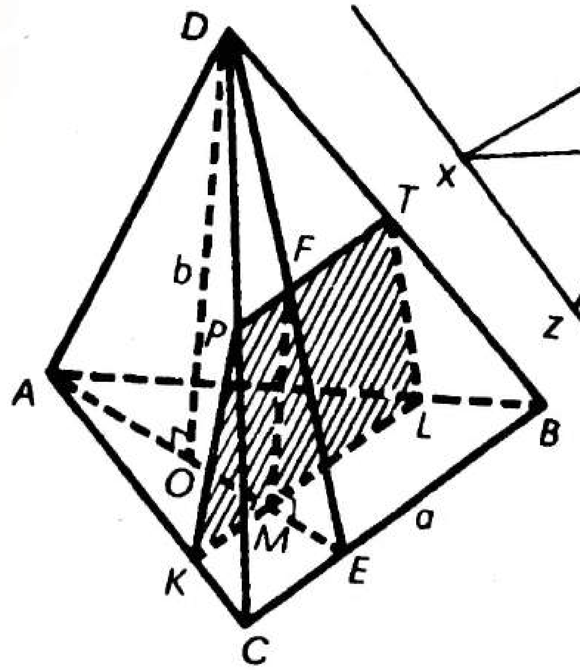
Рәс. 70



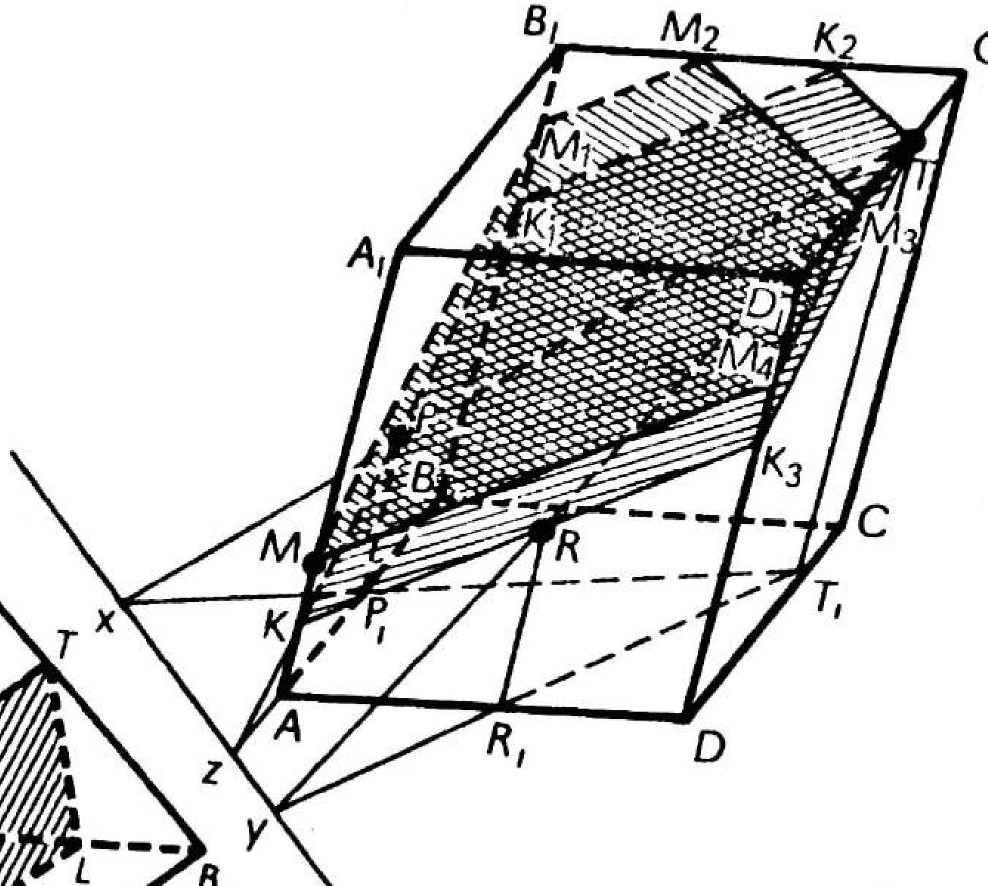
Рәс. 71



Рәс. 72



Рәс. 73



Рәс. 74

2. Кисемне төзү 71 нче рәсемдә күрсәтелгән. Кисүче яссылык BDC яссылыгын DE га параллель булган CX турысы буйлап кисә. Төзүне ничек исбатларга икәне күренеп тора.

Вар. 6. **1.** Кисемне төзү 72 нче рәсемдә күрсәтелгән. Кисемдә ягы $2\sqrt{2}$ см га тигез төзек алтыпочмак килеп чыкканын исбат итәргә кирәк. Аның мәйданы $12\sqrt{3}$ см^2.

2. Мәсьәлә 5 нче вариантның 2 нче мәсьәләсе кебек үк чишелә.

Вар. 7. **1.** Кисемне төзү 73 нче рәсемдә күрсәтелгән. Кисемдә нигезләре $KL = \frac{3}{4}a$ һәм $PT = \frac{a}{2}$ булган $KPTL$ трапециясе килеп чыкты. Трапециянең биеклеге $FM = \frac{b}{2}$. Ул вакытта трапециянең мәйданы $\frac{5ab}{16}$ га тигез.

2. Кисемне төзү 74 нче рәсемдә күрсәтелгән. Төзегәндә параллель яссылыклар үзлеге файдаланылды.

Вар. 8. **1.** Кисем яклары 8 һәм 3 кә, ә почмагы 60° ка тигез параллелограмм була. Ул вакытта кисемнең мәйданы $12\sqrt{3}$ кә тигез.

2. Мәсьәлә 7 нче вариантның 2 нче мәсьәләсе кебек үк чишелә.

М—7

Вар. 1. **1.** 2.

Вар. 2. **1.** 2.

2. Кисешү сызыгы AD һәм BE турыларына параллель.

Вар. 3. **1.** 24. **2.** $b \| c$.

Вар. 4. **1.** 2. **2.** $b \| c$.

Вар. 5. **1.** 13.

2. AM турысы белән b турысының кисешү ноктасы b турысының α яссылыгы белән кисешү ноктасы була да инде. a турысының B ноктасы аша AM га параллель үтүче туры белән кисешү ноктасы исә a турысының β яссылыгы белән кисешү ноктасы була.

Вар. 6. **1.** 8 см.

2. Мәсьәлә 5 нче вариантның 2 нче мәсьәләсе кебек үк чишелә.

Вар. 7. **1.** Параллелограммның түбәләре α яссылыгыннан бер якта яткан очракны карарбыз. AC белән BD — O ноктасында, ә A_1C_1 белән B_1D_1 O_1 ноктасында кисешсеннәр ди. OO_1 нең AA_1, BB_1, CC_1 һәм DD_1 гә параллель икәнлеге ансат исбатлана. Мондый очракта OO_1 — ACC_1A_1 һәм BDD_1B_1 трапецияләренең урта сызыгы.

$$OO_1 = \frac{AA_1 + CC_1}{2} \text{ һәм } OO_1 = \frac{BB_1 + DD_1}{2}.$$

Моннан $AA_1 + CC_1 = BB_1 + DD_1$. Мәсьәләнең шартыннан $13 + 19 = 36 + DD_1$ икәнлеге килеп чыга, ә монын булуы мөмкин түгел. Бу D ноктасының A, B һәм C ноктaларына карата яссылыкның икенче ягында урнашканлыгын белдерә. Мондый очракта BD һәм B_1D_1 BB_1D_1D яссылыгында кисешүче кисемтәләр була; $BB_1 \perp B_1D_1$, $DD_1 \perp B_1D_1$, $BB_1 = 36$. BD һәм B_1D_1 нең урталары арасындагы ераклык 16 га тигез. Ул вакытта $DD_1 = 4$ икәнле-

ге ансат табыла.

2. A, B нокталарын һәм эзләнелә торган m турысын тикшерик. AB ның уртасы аша аңа перпендикуляр үтүче α яссылыгы A һәм B нокталарыннан тигез ераклыктагы нокталар күплеге булыр. Әгәр $m \parallel \alpha$ булса, андый нокталар юк; әгәр α m турысын киссә, кисешү ноктасы эзләнелгән нокта булыр; әгәр m турысы α яссылыгында ятса, ул вакытта m турысының һәр ноктасы мәсьәләнең шартын канәгатьләндерә.

Вар. 8. **1.** $AB \parallel \alpha$ һәм $AB = A_1B_1 = 19$ икәнлеген исбатлау ансат. C ноктасы аша, α яссылыгына параллель итеп, β яссылыгы үткәрелгән. Бу яссылык BB_1 не — B_2 ноктасында, ә AA_1 не A_2 ноктасында кисеп үтә, $CB_2=11$ см, $CA_2=12$ см һәм $A_2B_2=19$ см. CB_2B һәм CA_2A өчпочмаклары турыпочмаклы. $BB_2 = AA_2 = x$ булсын ди. $CB^2 = x^2+121$, $CA^2 = x^2+144$, $AB^2 = CA^2 + CB^2$, $x^2+121+x^2+144 = 361$. Моннан $x^2 = 48$, $CA = \sqrt{48+121} = 13$, $CB = \sqrt{48+144} = 8\sqrt{3}$; $S_{ACB} = \frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{3}\cdot 13 = 52\sqrt{3}$ см^2.

2. AB ның уртасы аша аңа перпендикуляр үтүче β яссылыгы бирелгән A һәм B нокталарыннан тигез ераклыктагы нокталар күплеге була. Әгәр β яссылыгы бирелгән α яссылыгын киссә, α һәм β яссылыкларының кисешү сызыгы эзләнелгән күплек була. Әгәр $\beta \parallel \alpha$ булса, андый нокталар юк. Әгәр α һәм β тәңгәл килсәләр, бирелгән шартны α яссылыгының теләсә кайсы ноктасы канәгатьләндерә.

М—8

Вар. 1. **2.** 84.
Вар. 2. **2.** 24.
Вар. 3. **2.** 7.
Вар. 4. **2.** 3 см.

Вар. 5. **1.** DBC һәм DBA өчпочмакларының тигезлегеннән $DA = DC$ икәнлеге килеп чыга. E AC ның уртасы булсын, ул вакытта DE һәм BE — ADC һәм ABC өчпочмакларының медианалары. Бу өчпочмаклар тигезьянлы булганга, $AC \perp EB$ һәм $AC \perp ED$, ягъни AC —DEB яссылыгына перпендикуляр, димәк, $AC \perp DB$.

2. F — DB ның уртасы булсын. Тетраэдрның барлык кырлары төзек өчпочмаклар булганга, $CF \perp DB$ һәм $AF \perp DB$. Төзибез: $EM \parallel CF$ һәм $MK \parallel AF$, $M \in DB$. Ул вакытта KME өчпочмагы — эзләнелгән кисем. Аның мәйданы $\frac{a^2\sqrt{2}}{16}$ га тигез.

Вар. 6. **1.** Мәсьәлә 5 нче вариантның 1 нче мәсьәләсе кебек үк чишелә.

2. AC га параллель FE ны төзеп, E һәм B нокталарын тоташтырабыз, FEB — эзләнелгән кисем. $FE \perp CD$ һәм $EB \perp CD$, ягъни FEB яссылыгының CD га перпендикуляр икәнлеге ансат исбатлана.

Вар. 7. **1.** AA_1D_1 һәм AA_1B_1 өчпочмаклары тигез, шуңа күрә $AB_1 = AD_1$. O B_1D_1 кисемтәсенең уртасы булсын. Ул вакытта $B_1D_1 \perp AO$ һәм $B_1D_1 \perp A_1C_1$, ягъни B_1D_1 ACC_1 яссылыгына перпендикуляр, шуңа күрә $B_1D_1 \perp A_1C$, чөнки A_1C шул яссылыкта ята.

2. M ноктасы аша AC га параллель туры үткәрәбез, бу турының AA_1 кабыргасы белән кисешү ноктасы аша AB га параллель туры үткәрәбез. Алга таба ничек төзергә икәне күренеп тора.

Вар. 8. Мәсьәләләр 7 нче вариант мәсьәләләре кебек үк чишелә.

М—9

Вар. 1. $6\sqrt{5}$ см.

Вар. 2. 4 см.

Вар. 3. 15.

Вар. 4. 54.

Вар. 5. 12 см. Параллелограмм диагональләренең квадратлары суммасы турындагы теоремадан файдаланырга кирәк.

Вар. 6. AA_1, BB_1, CC_1 һәм DD_1 α яссылыгына перпендикуляр булсыннар. AA_1, CC_1 һәм BB_1, DD_1 параллель турылары белән аныклана торган яссылыклар OO_1 турысы буйлап кисешәләр. $OO_1 \perp \alpha$ һәм $OO_1 = 15$ см икәнлеге ачык. Трапециянең урта сызыгы α яссылыгына параллель булгач, бу яссылыкка трапециянең AD һәм BC нигезләре дә параллель. $AA_1 = x$ булсын. Трапециянең урта сызыгы α яссылыгыннан 13 кә тигез ераклыкта, шуңа күрә $BB_1 = 26 - x$. BDD_1B_1 трапециясен тикшерик. Трапециянең нигезләре $1 : 2$ гә чагыштырмасында булгач, $BO : OD = 1 : 2$ икәнлеге ачык аңлашыла, шулай итеп, BDD_1B_1 трапециясендә $BB_1 = 26 - x$, $DD_1 = x$, $OO_1 \| BB_1$, өстәвенә $BO : OD = 1 : 2$. Моннан $x = 7$ икәнлеген табу ансат. Ул вакытта нигезләрдән α яссылыгына кадәр ераклыклар 7 см һәм 19 см га тигез.

Вар. 7. MBD өчпочмагында MD турысына OK перпендикуляры төшерергә кирәк, монда O — квадрат диагональләренең кисешү ноктасы. OK — эзләнелгән ераклык икәнен исбатлау кыен түгел. MBD һәм OKD өчпочмакларының охшашлыгыннан $OK = \frac{\sqrt{6}}{6}$ икәнен табабыз.

Вар. 8. C ноктасыннан α яссылыгына CC_1 перпендикуляры төшерәбез; $CC_1 = 20$. CC_1D өчпочмагыннан табабыз: $DC_1 = 15$. Эзләнелгән ераклык BC_1D өчпочмагының DC_1 ягына төшерелгән биеклегенә тигез икәнен исбатлау ансат.

Җавап: 11,2.

М—10

Вар. 1. **1.** 8. **2.** 55°33′, 23°35′.

Вар. 2. **1.** *a*. **2.** 29°56′, 19°28′.

Вар. 3. **1.** *a*. **2.** 51°45′.

Вар. 4. **1.** $\frac{m}{2}$. **2.** 28°42′.

Вар. 5. **1.** M ноктасы трапеция яссылыгында ята.

2. 32°57′. $MM_1 \perp ABC$ булсын ди. M_1 ноктасы BAD почмагының биссектрисасында ята. M_1 ноктасыннан AD ягына M_1E перпендикулярын төшерәбез дә M һәм E нокталарын тоташтырабыз. $ME \perp AD$ икәнен исбатлау ансат. $AM = a$ булсын. Ул вакытта AME өчпочмагыннан AE ны табабыз, ә аннары AEM_1 өчпочмагыннан AM_1 не табабыз. AM_1 не белгәч, эзләнелгән почмакның косинусын табарга була.

Вар. 6. **1.** 4.

2. 57°12′. Мәсьәлә 5 нче вариантның 2 нче мәсьәләсе кебек үк чишелә.

Вар. 7. **1.** $KK_1 \perp ABC$ $(K_1 \in CD)$ булсын ди. $AK_1 \| FK$ икәнлеге ачык. Квадратта BE һәм AK_1 кисемтәләренең үзара перпендикуляр икәнен исбатлау ансат. Ул вакытта өч перпендикуляр турындагы теореманы файдаланып, $B_1E \perp AK_1$, икәнен исбатларга мөмкин, ә $FK \| AK_1$ булгач, $B_1E \perp FK$ була.

2. 48°35′. D түбәсе ABC төзек өчпочмагының O үзәгенә проекцияләнә. CDB яссылыгына AM перпендикуляры төшерәбез. M ноктасы CDB кырының DF биеклегендә ятканын исбатларга кирәк, $\angle ACM$ — эзләнелә торган почмак. Бу почмакның синусын табу өчен, ADF өчпочмагының AM биеклеген табу җитә.

Вар. 8. **2.** 50°46′. Ике мәсьәлә дә 7 нче вариант мәсьәләләре кебек үк чишелә.

М—11

Вар. 1. **1.** 90°. **2.** 60°.
Вар. 2. **2.** 45°.
Вар. 3. **1.** 4.5 см. **2.** 45°.
Вар. 4. **1.** 62,5 см. **2.** 45°.
Вар. 5. **1.** 24 см. **2.** 118°4′.
Вар. 6. **1.** 3. **2.** 87°48′.
Вар. 7. **1.** Бер ягы бирелгән X ноктасы аша үтәрлек итеп, сызыкча почмагын төзергә кирәк. Бу почмакның яклары өчпочмакларның уртак якларына төшерелгән биеклекләренә параллель.

2. 120°. Квадрат диагональләренең кисешү ноктасы O дан MD кабыргасына OK перпендикуляры төшерергә дә K ноктасын кисемтәләр ярдәмендә A һәм C түбәләре белән тоташтырырга кирәк. Ул вакытта $\angle AKC$ — эзләнелгән икекырлы почмакның сызыкча почмагы. BMD өчпочмагыннан $OK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$ икәнен табабыз. Алга таба чишелеше билгеле.

Вар. 8. **1.** Мәсьәлә 7 нче вариантның 1 нче мәсьәләсе кебек үк чишелә.

2. 120°. B_1D турысы икекырлы почмакның кабыргасы була. B_1A_1D һәм B_1C_1D тигез өчпочмакларының A_1K һәм C_1K биеклекләре белән төзелгән почмак икекырлы почмакның сызыкча почмагы була. Бу почмакның 120° ка тигез икәнен чыгару ансат.

М—12

Вар. 1. **2.** 2) 2.
Вар. 2. **2.** 2) 6.
Вар. 3. **1.** 2. **2.** 1) 4.
Вар. 4. **1.** 6. **2.** 1) 2.

Вар. 5. **1.** $\dfrac{\sqrt{337}}{5}$.

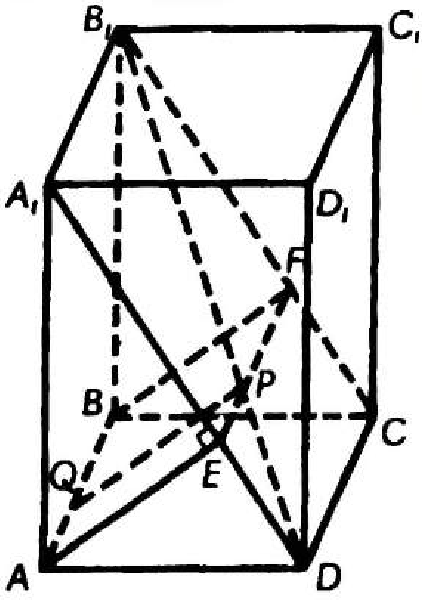
2. $\dfrac{4\sqrt{1045}}{17}$. 75 нче рәсемне кара. Бу рәсемдә $AE \perp A_1D$, $EF \parallel CD$ һәм $QP \parallel AE$; QP — AB һәм B_1D чалышма турыларына уртак перпендикуляр.

Вар. 6. **1.** 5.

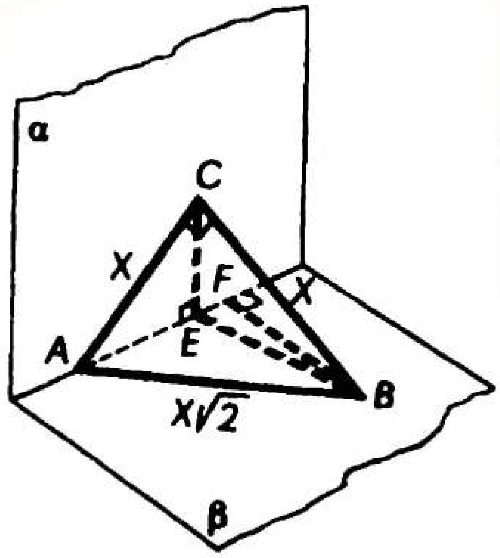
2. $\dfrac{5\sqrt{34}}{3}$ см. Мәсьәлә 5 нче вариантның 2 нче мәсьәләсе кебек үк чишелә.

Вар. 7. **1.** $AC = CB = x$ булсын. Ул вакытта $AB = x\sqrt{2}$ (рәс. 76). AEC һәм CEB турыпочмаклы өчпочмакларыннан табабыз: $AE = BE = \sqrt{x^2 - 4}$. EFB өчпочмагыннан

$$EF = \sqrt{x^2 - 4 - 15} = \sqrt{x^2 - 19}, \quad AF = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 19}.$$



Рәс. 75



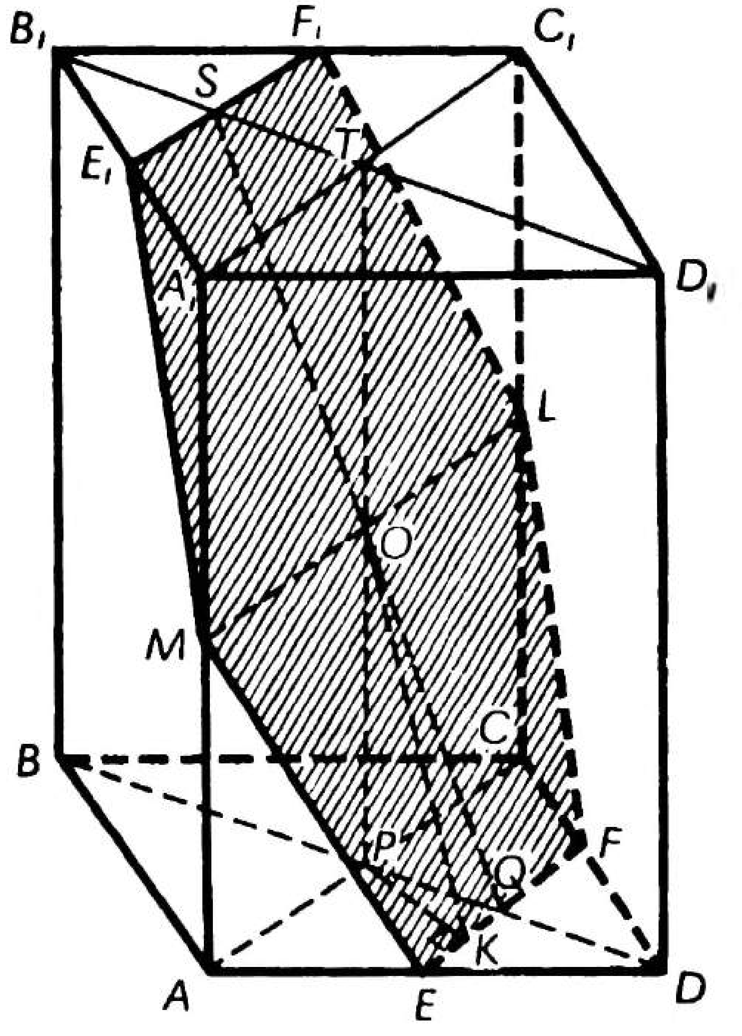
Рәс. 76

AFB өчпочмагыннан

$$2x^2 = x^2 - 4 + x^2 - 19 + 2\sqrt{(x^2-4)\ (x^2-19)} + 15$$

тигезләмәсен табабыз. Моннан $x^4 - 23x^2 + 60 = 0$ һәм $x^2 = 20$. Ул вакытта $S_{ACB} = 10$. Җавап: 10 см².

2. 77 нче рәсемдә эзләнелгән кисем күрсәтелгән; $ML \parallel EF$, $EF = \frac{5}{2}$, $ML = 5$.



Рәс. 77

$PK \perp EF$ ны төзибез дә O һәм K нокталарын кисемтә белән тоташтырабыз. Ул вакытта $OK \perp EF$; PK ADC өчпочмагы биеклегенең яртысына тигез, ягъни $PK=\frac{6}{5}$. OPK өчпочмагыннан табабыз:

$$OK = \sqrt{\frac{36}{25}+49} = \frac{\sqrt{1261}}{5}.$$

$$S_{MLEF} = \frac{1}{2}(EF+MD)\cdot OK = \frac{3}{4}\sqrt{1261}.$$

Ул вакытта

$$S_{кис.} = 2S_{MLFE} = \frac{3}{2}\sqrt{1261}.\ \text{Җавап: } \frac{3}{2}\sqrt{1261}\ \text{см}^2.$$

Вар. 8. **1.** 78 нче рәсемдә күрсәтелгәнчә, $DCKM$ квадратын төзибез. Ул вакытта $CM \parallel EK$. $DCKM$ квадратын нигез итеп алып куб төзибез. $MT \parallel DB$ икәнлеге ачык. MTC өчпочмагы — тигезьяклы һәм $\angle CMT = 60°$, ә бу бирелгән чалышма турылар арасындагы почмак була да инде. Җавап: 60°.

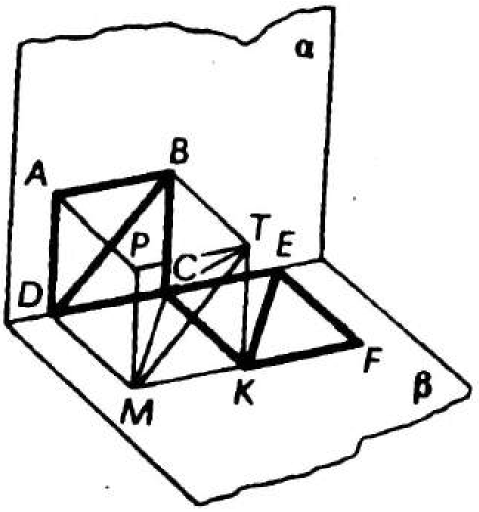
2. Кисемне төзү 79 нчы рәсемдә күрсәтелгән. $MN \parallel B_1D$ һәм $KL \parallel AC$. $BP \perp EF$ ны төзибез. Ул вакытта $MP \perp EF$.

$$S_{кис.} = S_{KML} + S_{EKLP}.$$

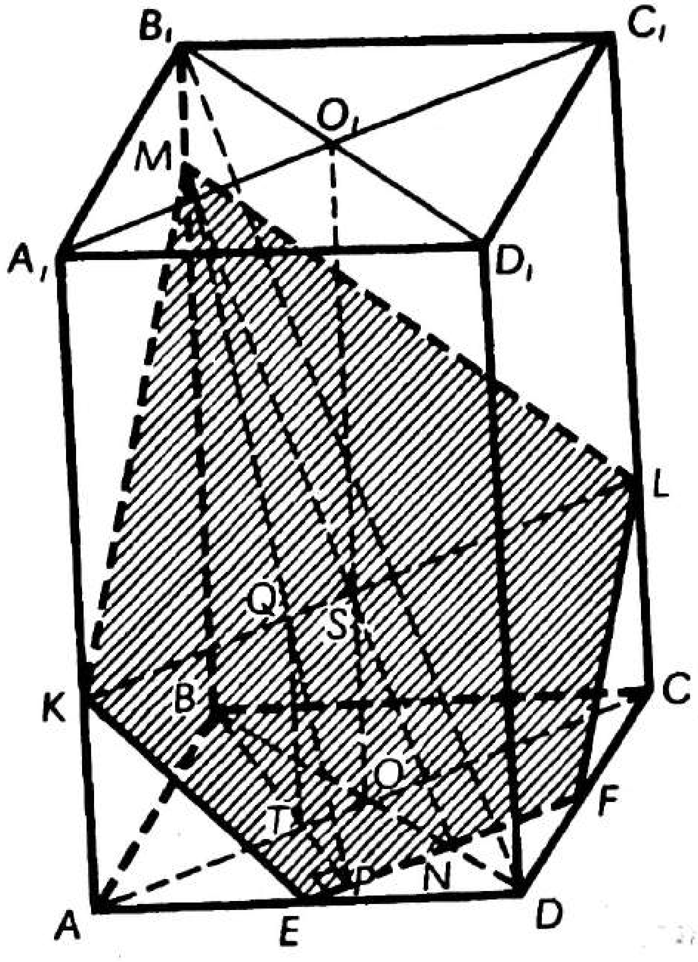
$MP = h$ булсын ди.

$$S_{KML} = \frac{1}{2}AC \cdot QM\ (KL = AC),$$

$$S_{EKLF} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot AC \cdot QP.$$



Рәс. 78



Рәс. 79

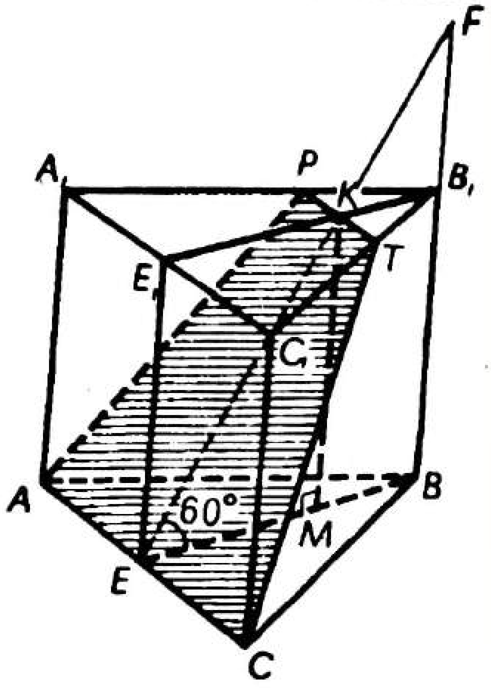
MBP һәм QTP өчпочмакларының охшашлыгыннан $MQ = \frac{2}{3}h$ һәм $QP = \frac{h}{3}$ икәнлеге килеп чыга. Ул вакытта

$$S_{кис.} = \frac{1}{2}AC\cdot\frac{2}{3}h + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}AC\cdot\frac{h}{3} = \frac{7AC\cdot h}{12}.$$

$BP = \frac{18}{5}$, $MB = \frac{3}{4}$, $BB_1 = \frac{21}{2}$ икәнен табу кыен түгел. Ул B_1BD һәм MBN өчпочмакларының охшашлыгыннан килеп чыга. Ул вакытта MBP өчпочмагыннан табабыз:

$$MP = h = \sqrt{\frac{441}{4}+\frac{324}{25}} = \frac{111}{10}.$$

$$S_{кис.} = \frac{7\cdot5\cdot111}{12\cdot10} = \frac{259}{8}.$$ Җавап: $\frac{259}{8}$.



Рәс. 80

М—13

Вар. 1. **1.** 60°. **2.** $8\sqrt{2}$ см².

Вар. 2. **1.** 45°. **2.** $2\sqrt{3}$ см².

Вар. 3. **1.** $3\sqrt{7}$ см². **2.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

Вар. 4. **1.** $\frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$. **2.** $\frac{m\sqrt{6}}{2}$, $m^2\sqrt{2}$.

Вар. 5. **1.** Кисемне төзү 80 нче рәсемдә күрсәтелгән; $BE = \frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 3$, $FB = 3\sqrt{3}$. Ул вакытта $FB_1 = \sqrt{3}$. FB_1K һәм FBE өчпочмакларының охшашлыгыннан $\frac{KB_1}{EB} = \frac{1}{3}$ һәм $KB_1 = 1$ икәнлеге килеп чыга. PB_1T һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларының охшашлыгыннан $\frac{PT}{A_1C_1} = \frac{1}{3}$ һәм $PT = \frac{2\sqrt{3}}{2}$ икәнен табабыз. KME өчпочмагыннан ($\angle KME = 90°$) $KE = = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 4$ икәнен беләбез.

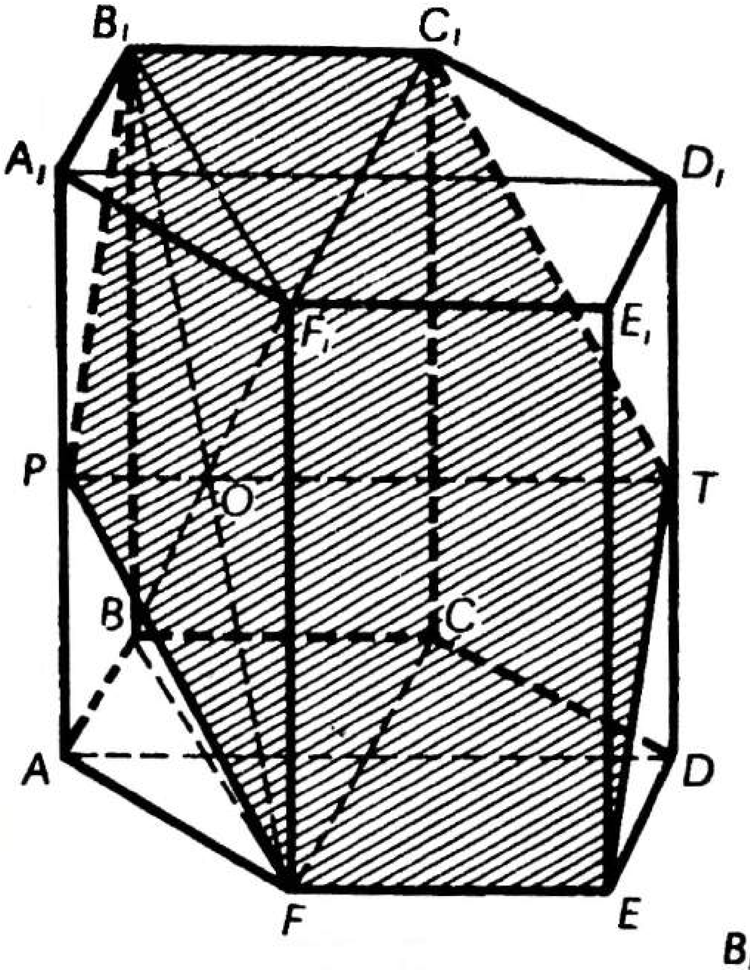
$$S_{кис.} = \frac{1}{2}(PT + AC)\cdot KE = \frac{16\sqrt{3}}{3}.$$ Җавап: $\frac{16\sqrt{3}}{3}$.

2. $2Q$.

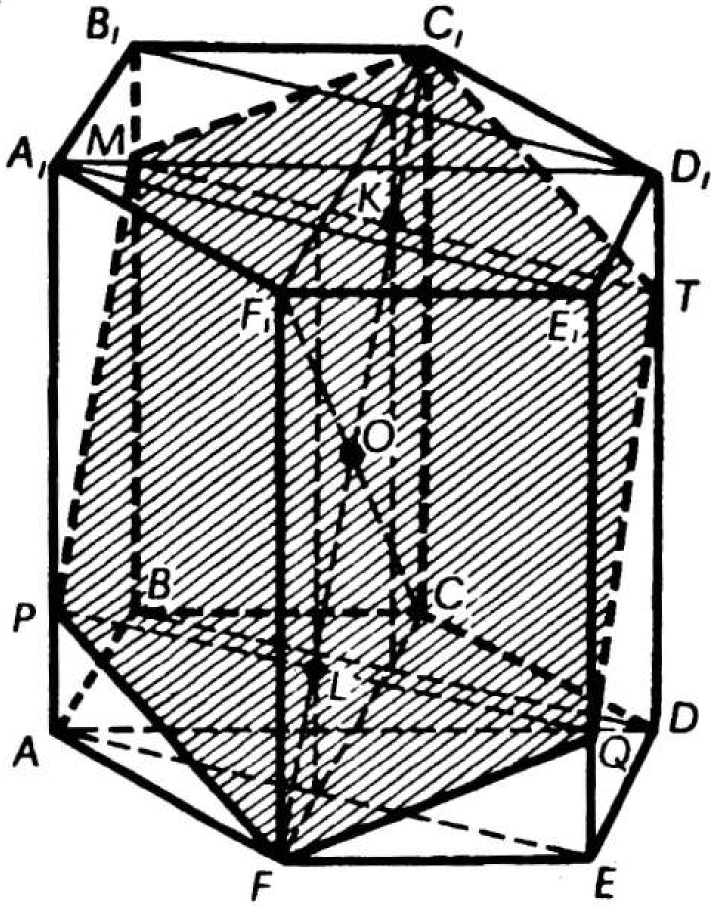
Вар. 6. **1.** $30\sqrt{2}$ см². Мәсьәлә 5 нче вариантның 1 нче мәсьәләсе кебек үк чишелә. **2.** $Q\sqrt{3}$.

Вар. 7. **1.** Призманы нигезендә $ADBC$ ромбы булган $ADBCA_1D_1B_1C_1$ туры параллелепипедына тутырырга кирәк. Андый очракта AC_1 белән B_1C арасындагы почмак D_1AC_1 почмагының зурлыгына тигез. Бу почмакны D_1AC_1 өчпочмагыннан косинуслар теоремасын кулланып табарга мөмкин, монда $AD_1 = AC_1 = a\sqrt{2}$ һәм $D_1C_1 = a\sqrt{3}$ (призманың кабыргасы a га тигез дип кабул ителгән). Җавап: $\arccos\frac{1}{4} \approx 75^\circ 31'$.

2. Эзләнелгән кисем 81 нче рәсемдә сурәтләнгән. Кисемне F_1B диагоналенә перпендикуляр итеп төзибез. Билгеләп үтәбез: B_1F_1FB — квадрат булганга күрә, F_1B кечерәк диагонале B_1F ка перпендикуляр була. Аннары $F_1B \perp BC$ икәнен исбатлау да җиңел, ә $PT \| BC$ булганга, $F_1B \perp PT$. Шул рәвешле F_1B диагонале PT һәм B_1F кисешүче турыларына пер-



Рәс. 81



Рәс. 82

пендикуляр һәм бу турылар кисем яссылыгын бирә. Кисем яссылыгы нигез белән 45° лы почмак төзи. Ул вакытта

$$S_{кис.} = \frac{S_н}{\cos 45^\circ} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{3a^2\sqrt{6}}{2}.\ \text{Җавап: } \frac{3a^2\sqrt{6}}{2}.$$

Вар. 8. **1.** $\arccos\frac{2\sqrt{2}}{5} \approx 55^\circ 33'$. Мәсьәлә 7 нче вариантның 1 нче мәсьәләсе кебек үк чишелә.

2. Эзләнелгән кисем 82 нче рәсемдә сурәтләнгән. Игътибар итәргә кирәк: FF_1C_1C — квадрат, шуңа күрә $F_1C \perp C_1F$. Моннан тыш, $F_1C \perp AE$, ә $PQ \parallel AE$ булганга күрә, $F_1C \perp PQ$. Шулай итеп, F_1C диагонале кисем яссылыгын бирүче C_1F һәм PQ кисешүче турыларына перпендикуляр. Сызымны төзегәндә кисем яссылыгының BB_1D_1 яссылыгын PQ га параллель булган MT турысы буйлап кискәнлеге искә алынды. Кисем яссылыгы нигез яссылыгы белән 45° лы почмак төзи.

$$S_{кис.} = \frac{S_н}{\cos 45^\circ} = \frac{3a^2\sqrt{6}}{2}.\ \text{Җавап: } \frac{3a^2\sqrt{6}}{2}.$$

М—14

Вар. 1. $12\sqrt{39}$.

Вар. 2. $50(\sqrt{2}+1)$.

Вар. 3. $\frac{21}{13}(7\sqrt{3}+1)$.

Вар. 4. $\frac{2310\sqrt{3}}{13}$.

Вар. 5. $36(7+6\sqrt{11})$.

Вар. 6. $30(3\sqrt{161}+28)$.

Вар. 7. Нигез диагональләре O ноктасында кисешсеннәр ди. Ул вакытта $AO = 3$, $\angle BB_1D = 60^\circ$. BB_1D_1 яссылыгында O ноктасыннан B_1D га OK перпендикулярын төшерәбез. OK ның озынлыгы AC белән B_1D арасындагы ераклык булуын һәм 2 гә тигез икәнен исбатларга мөмкин. Алга таба чишелеше анык. Җавап: $\frac{16}{3}(10\sqrt{3}+9)$ см².

Вар. 8. AD белән D_1C арасындагы ераклык AD белән BA_1D_1C кисем яссылыгы арасындагы ераклыкка тигез. A ноктасыннан BC турысына AM перпендикулярын төшерәбез (M ноктасы BC ягында ятмый) һәм M ноктасын A_1 ноктасы белән тоташтырабыз. A_1AM өчпочмагында A_1M га AK биеклеген төшерәбез. AK ның озынлыгы AD белән D_1C арасындагы ераклыкка, ә аның $\frac{12}{5}$ гә тигез икәнен исбатларга мөмкин. A_1AM өчпочмагыннан $AM = 3$ икәнен табабыз. Алга таба чишелеше билгеле. Җавап: $44\sqrt{3}$ см².

М—15

Вар. 1. **2.** 350 см².
Вар. 2. **2.** 75 см².
Вар. 3. **1.** ab. **2.** 120°, 60°.

Вар. 4. **1.** $ab\sqrt{2}$. **2.** 60°, 120°.

Вар. 5. **1.** $\frac{Q}{2}(2+\sqrt{13})$.

2. Параллелепипедның перпендикуляр кисеме $A_2B_2C_2D_2$ не төзибез. Ул вакытта $A_2B_2 = 17$, $B_2D_2 = 10$. $B_2A_2D_2$ өчпочмагының A_2K биеклегенең озынлыгы AA_1 һәм B_1D арасындагы ераклык була, ә ул 8 гә тигез. $B_2A_2D_2$ өчпочмагыннан $B_2D_2 = 21$ яки 9 икәнен табабыз. BB_1D_1D диагональ кисеменең мәйданын белгәч, ян кабыргасының мөмкин саналган озынлыгы 10 яки $\frac{210}{9}$ булуын беләбез. Ул вакытта ян өслегенең мәйданы 540 яки 1260 ка тигез. Җавап: 540 яки 1260.

Вар. 6. **1.** $Q\sqrt{7}$.

2. $4(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})$. Мәсьәлә 5 нче вариантның 2 нче мәсьәләсе кебек үк чишелә.

Вар. 7. **1.** Параллелепипедның A_1K биеклеге нигезнең AC диагоналенә проекцияләнә. K ноктасыннан AD га перпендикуляр төшерәбез дә A_1 һәм M нокталарын тоташтырабыз. A_1M AA_1D_1D кырының биеклеге икәнен исбатлау җиңел. AA_1K өчпочмагыннан $AK = 8$ икәнен табабыз. AKM һәм AOD өчпочмакларының охшашлыгын файдаланып (O — AC һәм BD нын кисешү ноктасы), $KM = \frac{24}{5}$ икәнен беләбез. A_1KM өчпочмагыннан $A_1M = \frac{26}{5}$ икәнен табабыз. Ул вакытта $S_{\text{ян}} = 520$. Җавап: 520.

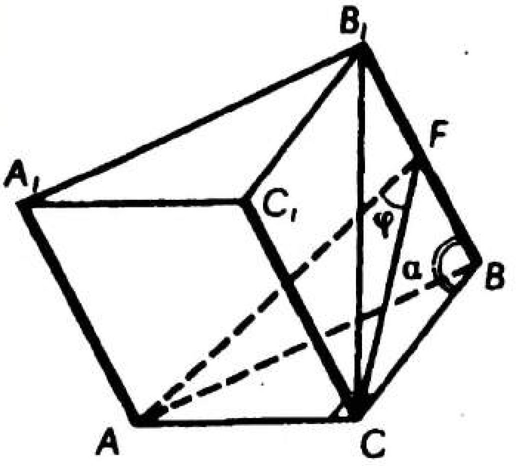
2. Өч перпендикуляр турындагы теореманы кулланып, $AC \perp B_1B$ икәнен исбатларга мөмкин (рәс. 83). ACF турыпочмаклы өчпочмагы ($\angle ACF = 90°$) призманың перпендикуляр кисеме була, $CF = a\sin\alpha$, $AC = a\sin\alpha \operatorname{tg}\varphi$, $AF = \frac{a\sin\alpha}{\cos\varphi}$. Перпендикуляр кисемнең периметры

$$P = a\sin\alpha\left(1+\operatorname{tg}\varphi+\frac{1}{\cos\varphi}\right) = \frac{a\sin\alpha(1+\cos\varphi+\sin\varphi)}{\cos\varphi}.$$

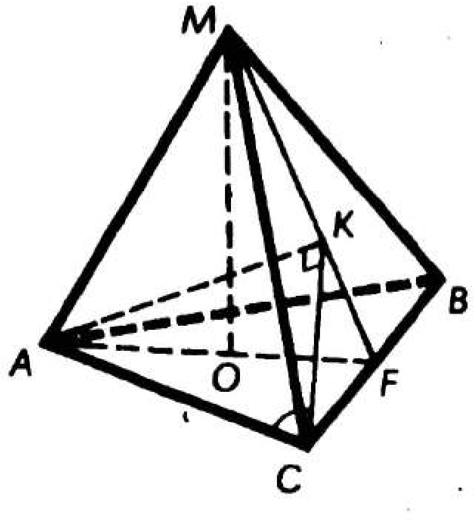
B_1CB өчпочмагыннан табабыз:

$$BB_1 = \frac{a}{\cos\alpha}\cdot S_{\text{ян}} = \frac{a^2\operatorname{tg}\alpha(1+\cos\varphi+\sin\varphi)}{\cos\varphi}.$$

Җавап: $\frac{a^2\operatorname{tg}\alpha(1+\cos\varphi+\sin\varphi)}{\cos\varphi}$.



Рәс. 83



Рәс. 84

Вар. 8. **1.** A_1K — параллелепипедның биеклеге, $K \in BD$ булсын. $\angle A_1AD = \angle A_1AB$ булганга, AK — ABD өчпочмагының биссектрисасы. Косинуслар теоремасы буенча $AB = 13$ икәнен һәм, өчпочмакның биссектрисасы үзлеген файдаланып, $KD = \frac{15}{4}$ икәнен табабыз. Ул вакытта параллелепипедның биеклеге $A_1K = \frac{15}{4}$ ($\angle A_1DK = 45°$). K ноктасыннан AD га KF перпендикулярын төшерәбез дә A_1 һәм F нокталарын тоташтырабыз. A_1F — AA_1D_1D ян кырының биеклеге. $KF = KD \cdot \sin 60° = \frac{15\sqrt{3}}{8}$. A_1KF өчпочмагыннан табабыз:

$$A_1F=\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{15\sqrt{7}}{8}.$$

AA_1B_1B кырының да биеклеге $\frac{15\sqrt{7}}{8}$ гә тигез икәнен исбатлау ансат.

$$S_{ян} = 56 \cdot \frac{15\sqrt{7}}{8} = 105\sqrt{7}.\ \text{Җавап: } 105\sqrt{7}.$$

2. $\frac{l^2 \sin 2\varphi(1 + \cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos\alpha}$. Мәсьәлә 7 нче вариантның 2 нче мәсьәләсе кебек чишелә.

М—16

Вар. 1. **1.** 96 $см^2$.

2. $\operatorname{arctg} 2\sqrt{3} \approx 73°54'$, $\operatorname{arctg} 4\sqrt{3} \approx 81°47'$.

Вар. 2. **1.** $270\sqrt{3}$ $см^2$.

2. $\operatorname{arctg} 6 \approx 80°32'$, $\operatorname{arctg} 3\sqrt{2} \approx 76°44'$.

Вар. 3. **1.** $24\sqrt{3}$.

2. 1) $2 \operatorname{arctg}\sqrt{2} \approx 109°28'$; 2) $60°$.

Вар. 4. **1.** 128.

2. 1) $2 \operatorname{arctg}\frac{2}{3} \approx 67°23'$; 2) $180° - 2 \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{13}}{4} \approx 51°19'$.

Вар. 5. **1.** $a^2\sqrt{2}$.

2. $2 \operatorname{arctg}\left(\cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\frac{180°}{n}\right)$, $\approx 27°57'$.

Вар. 6. **1.** $\frac{3m^2\sqrt{2}}{8}$.

2. $\arccos\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{180°}{n}\right)$, $= 56°28'$.

Вар. 7. **1.** 84 нче рәсемдә $AK \perp MF$. AK ның CMB яссылыгына перпендикуляр икәнен исбат итәргә мөмкин. Ул вакытта $\angle ACK$ AC белән CMB яссылыгы арасындагы почмак була. $OF = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, $MF = \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{12}} = \frac{7a}{2\sqrt{3}}$; $AK \cdot MF = MO \cdot AF$. Моннан $AK = \frac{MO \cdot AF}{MF} = \frac{6a}{7}$; $\sin\angle ACK = \frac{AK}{AC} = \frac{6}{7}$. $\angle ACK \approx 59°$. Җавап: $\arcsin\frac{6}{7} \approx 59°$.

2. PBC һәм PAF яссылыклары NP турысы буйлап кисешәләр (рәс. 85); $KM \perp PN$. $\angle BMA = \alpha$ икәнен исбатларга мөмкин, $MK = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. NMK һәм NPO өчпочмакларының охшашлыгыннан $\frac{PO}{MK} = \frac{NO}{MN}$ икәнлеге килеп чыга. Моннан $PO = \frac{NO \cdot MK}{MN}$. NMK өчпочмагыннан

$$MN = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2}\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

икәнлеге табыла. Андый очракта $PO = \dfrac{a\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}}$.

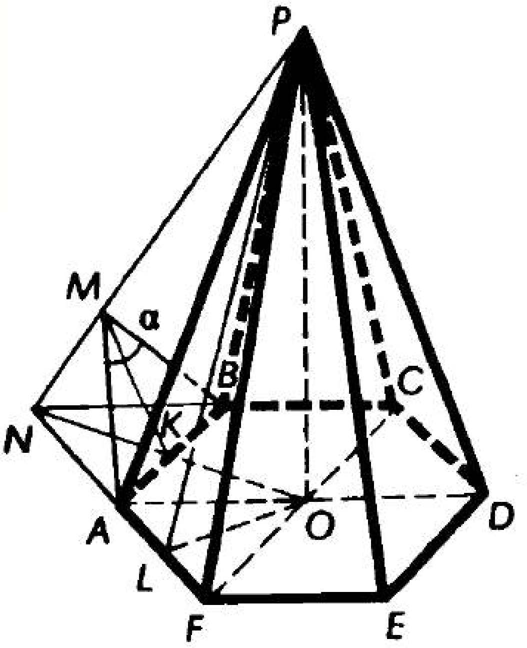
POL өчпочмагыннан пирамиданың апофемасы

$$PL = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{3 - \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{3 + 3\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{3 - \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}} =$$

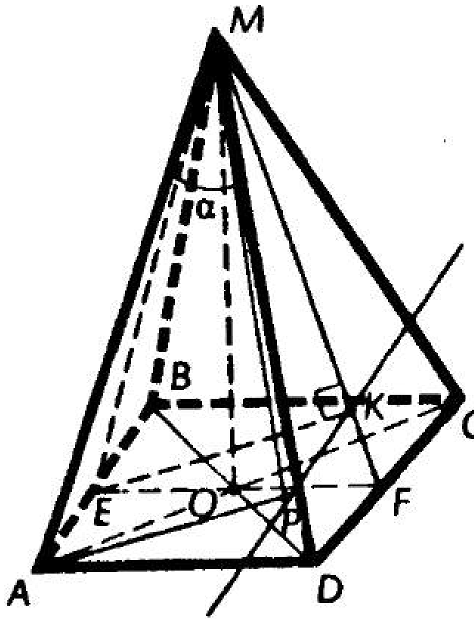
$$= \frac{3a}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

$$S_{ян} = \frac{1}{2}\cdot P_{н}\cdot PL = \frac{9a^2}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}}.$$ Җавап: $\dfrac{9a^2}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}}$.

Вар. 8. **1.** 86 нчы рәсемдә EK CMD яссылыгына перпендикуляр. AB һәм EK турылары белән аныклана торган яссылык CMD яссылыгы белән AB га параллель туры буйлап



Рәс. 85



Рәс. 86

кисешә; $AP \parallel EK$, ә EK CMD яссылыгына перпендикуляр булганга күрә, AP да шул ук яссылыкка перпендикуляр була. Шулай булгач, $\angle AMP = \alpha$ — эзләнелгән почмак.

$$MF = \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{3a}{2},\ MO \cdot EF = EK \cdot MF.$$

Моннан

$$EK = \frac{MO \cdot EF}{MF} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a \cdot 2}{3a} = \frac{2a\sqrt{2}}{3},$$

ләкин $AP = EK = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$. AMP өчпочмагыннан табабыз:

$$\sin\alpha = \frac{AP}{AM} \cdot AM = \sqrt{2a^2 + \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

Ул вакытта

$$\sin\alpha = \frac{4\sqrt{5}}{15}\ \text{һәм}\ \alpha = \arcsin\frac{4\sqrt{5}}{15} \approx 36^\circ 36'.$$

Җавап: $\arcsin\dfrac{4\sqrt{5}}{15} \approx 36^\circ 36'$.

2. $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{1 - 3\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}}$ Мәсьәлә 7 нче вариантның 2 нче мәсьәләсе кебек үк чишелә.

М—17

Вар. 1. **1.** $a\sqrt{3}$. **2.** $12(5\sqrt{3} + 8)$.

Вар. 2. **1.** a. **2.** $100(3 + 2\sqrt{6})$.

Вар. 3. **1.** 1) $2\sqrt{3}$ см; 2) 40 см^2. **2.** $\dfrac{a^2}{2}(3 + 2\sqrt{3})$.

Вар. 4. **1.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$; $\dfrac{a^2\sqrt{6}}{2}$. **2.** $\dfrac{a^2}{4}(3 + \sqrt{6} + \sqrt{3})$.

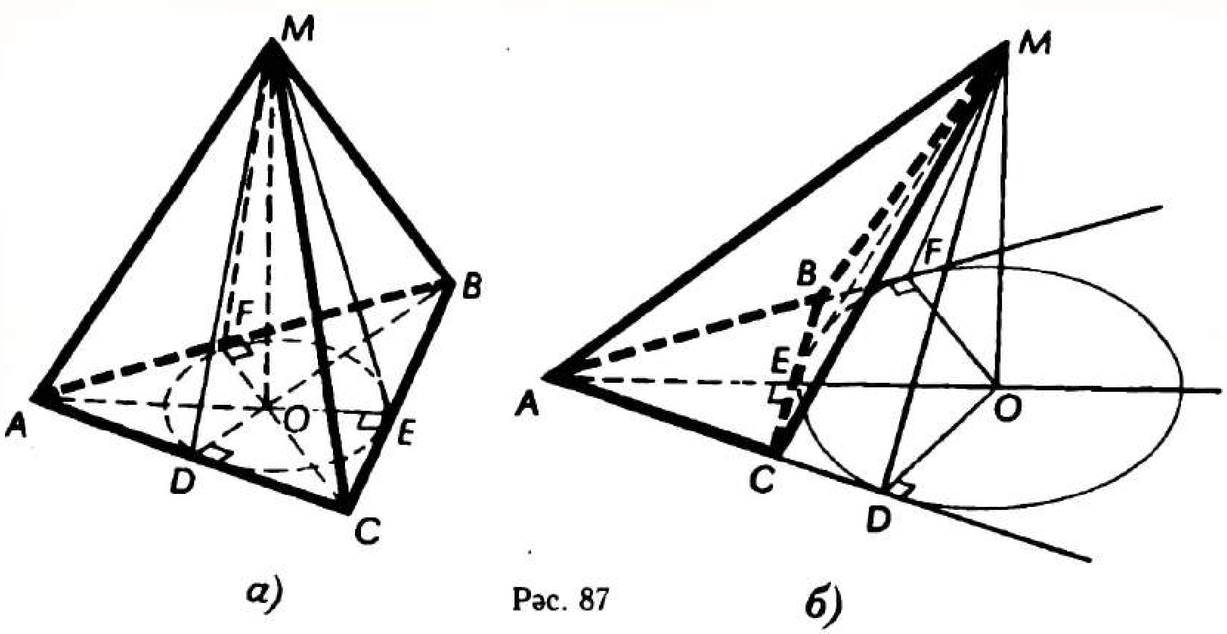
Вар. 5. **1.** $\dfrac{b}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\varphi$; $\dfrac{b^2\operatorname{tg}\alpha}{4\cos\varphi}$.

2. $480(5 + 2\sqrt{3})$. MAC һәм MAB кырларының нигезгә 60° лы почмак ясап авышканын исәпкә алырга кирәк.

Вар. 6. **1.** $\dfrac{a\operatorname{tg}\varphi}{4\cos\frac{\alpha}{2}}$; $\dfrac{a^2}{8\sin\alpha \cdot \cos\varphi}$.

2. $3(1 + 2\sqrt{2})$см^2. MAB һәм MBC кырларының нигезгә 45° лы почмак ясап авышканын исәпкә алырга кирәк.

Вар. 7. **1.** Пирамиданың ян кырларының мәйданнары үзара тигез булып, нигезендә төзек өчпочмак яткач, пирамиданың ян кырларының түбәдән төшерелгән биеклекләре үзара тигез була. Бу — пирамиданың түбәсе нигезенең якларыннан яки бу яклар яткан



Рәс. 87

турылардан тигез ераклыкта дигән сүз. Мондый очракта пирамиданың түбәсе нигезгә камаулы әйләнәнең, я аңа тышкы яктан камалган әйләнәләрдән берсенең үзәгенә проекцияләнә. Бирелгән очракта төрле ике генә вариантның булуы мөмкин (рәс. 87, а, б):

а) очрагында камаулы әйләнәнең радиусы $\frac{a}{2\sqrt{3}}$ кә, ә ян кырының биеклеге:

$$\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{12}} = \frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}.$$

Ул вакытта

$$S_{ян} = \frac{1}{2} \cdot P_н;\ h_{ян} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{39}}{4};$$

б) очрагында тышкы камаулы әйләнәнең радиусы $r_a = \frac{S}{p-a}$ формуласы буенча табыла, монда r_a a ягына орынган тышкы камаулы әйләнәнең радиусы, S — өчпочмак мәйданы, ә p — аның ярымпериметры. Безнең очракта тышкы камаулы әйләнәнең радиусы:

$$r = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\left(\frac{3a}{2} - a\right)} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Ул вакытта ян кырларының биеклекләре:

$$\sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2},$$

$$S_{ян} = \frac{1}{2}P_н \cdot h_{ян\ к.} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{7}}{4}.$$

Җавап: $\frac{a^2\sqrt{39}}{4}$ яки $\frac{3a^2\sqrt{7}}{4}$.

2. $MABC$ пирамидасының нигезендә яткан ABC өчпочмагының AD, BE һәм CK биеклекләре O ноктасында кисешсеннәр ди. Шарт буенча MO — пирамиданың биеклеге. Өч перпендикуляр турындагы теорема буенча $ME \perp AC$. Ул вакытта MEA һәм MEC өчпочмакларыннан

$$ME^2 = MA^2 - AE^2 \text{ һәм } ME^2 = MC^2 - EC^2$$

икәнлеге килеп чыга. Моннан

$$MA^2 - MC^2 = AE^2 - EC^2. \qquad (1)$$

BEA һәм BEC өчпочмакларыннан

$$AE^2 = AB^2 - BE^2 \text{ һәм } EC^2 = BC^2 - BE^2$$

икәнлеге килеп чыга. Моннан

$$AE^2 - EC^2 = AB^2 - BC^2 \qquad (2)$$

(1) һәм (2) дән чыгып язабыз:

$$MA^2 - MC^2 = AB^2 - BC^2,$$

ягъни

$MA^2 + BC^2 = MC^2 + AB^2$ (MA һәм BC, MC һәм AB — пирамиданың чалышма кабыргалары). Югарыдагыга охшаш рәвештә табабыз:

$$MA^2 + BC^2 = MB^2 + AC^2.$$

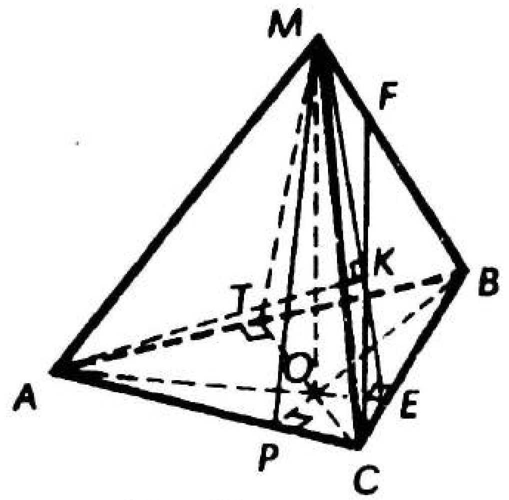
Вар. 8. **1.** Мәсьәлә 7 нче вариантның 1 нче мәсьәләсе кебек үк чишелә. $\angle MAB \neq \angle MAC$ булганга күрә, пирамиданың түбәсе нигезенә тышкы яктан аның тигез якларына орындырып төзелгән камаулы әйләнәләрнең үзәкләренә генә проекцияләнергә мөмкин икәнен исәпкә алырга кирәк. $S_{ABC} = 60$, $p = 25$. Тышкы камаулы әйләнәнең радиусы

$$r = \frac{60}{25 - 13} = 5.$$

Ул вакытта ян кырларының биеклеге 13 кә тигез һәм

$$S_{ян} = \frac{1}{2} P_{н} \cdot h_{ян\text{ кыр}} = 25 \cdot 13 = 325.$$

Җавап: 325.



Рәс. 88

2. $MABC$ пирамидасының нигезендә яткан ABC өчпочмагының AE, BP һәм CT биеклекләре O ноктасында кисешсеннәр ди һәм MO — ABC яссылыгына перпендикуляр булсын. Пирамиданың A түбәсеннән AK биеклеге K ноктасына — MBC кыры биеклекләренең кисешү ноктасына проекцияләнүен исбатларбыз. Өч перпендикуляр турындагы теорема буенча $ME \perp BC$ (рәс. 88). $AK \perp ME$ — төзү буенча. Ул вакытта AK ның MBC яссылыгына перпендикуляр икәнен исбатлау ансат. Хәзер беләбез: $AK \perp MBC$, AC — бу яссылыкка авышма. CK — аның шул яссылыкка проекциясе. MB — әле-

ге яссылыкта ята һәм $MB \perp AC$ (исбатлау гади). Ул вакытта өч перпендикуляр турындагы теорема нигезендә $CK \perp MB$, ягъни $CF \perp MB$. Бу исә K ноктасы MBC кыры биеклекләренең кисешү ноктасы икәнен белдерә. Пирамиданың калган биеклекләре өчен дә исбатлау шулай ук эшләнә.

М—18

Вар. 1. **1.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{24}$. **2.** $28\sqrt{2}$ см^2.

Вар. 2. **1.** $\frac{a^2}{2}$. **2.** $14\sqrt{3}$ см^2.

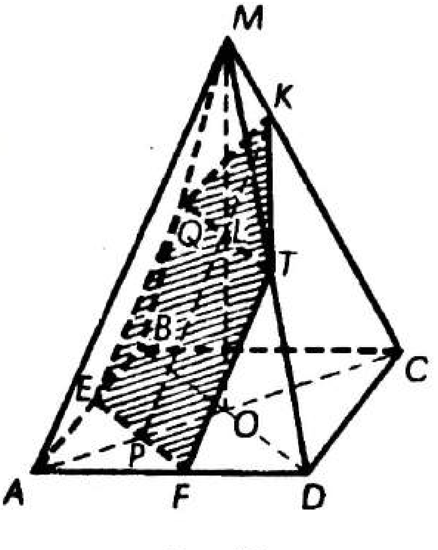
Вар. 3. **1.** $\frac{3a^2}{8}$. **2.** 96 см^2.

Вар. 4. **1.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$. **2.** $42\sqrt{3}$ см^2.

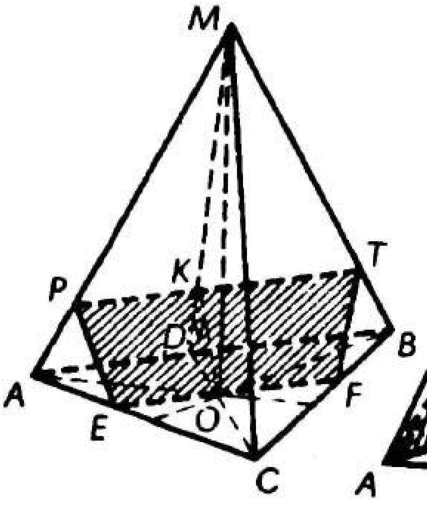
Вар. 5. **1.** $\frac{5ab\sqrt{2}}{16}$. Кисем 89 рәсемдә сурәтләнгән. $EQTF$ ның турыпочмаклык икәнен искә алырга кирәк.

2. $105\sqrt{3}$; $8\sqrt{6}$.

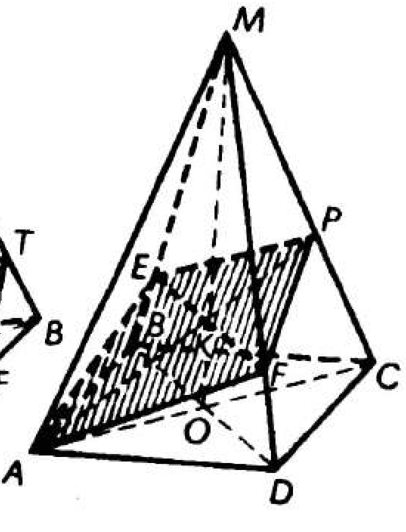
Вар. 6. **1.** $\frac{17a^2}{96}$. Кисем 90 нчы рәсемдә күрсәтелгән. OK — AMB яссылыгына перпендикуляр; $PT \parallel AB$ һәм PMT белән AMB өчпочмакларының охшашлыгыннан табыла.



Рәс. 89



Рәс. 90



Рәс. 91

2. $24\sqrt{3}$; $2\sqrt{6}$. Кисемнең турыпочмаклык икәнен исбатларга кирәк. Ул вакытта ян кабырганың озынлыгы 4 кә тигез. Алга таба чишелеше билгеле.

Вар. 7. **1.** Кисем 91 нче рәсемдә күрсәтелгән. $AP \perp MC$ һәм $EF \parallel BD$, өстәвенә $KE = KF$ һәм $EF \perp AP$.

$$S_{\text{кис.}} = \frac{1}{2} AP \cdot EF; \; AP = a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

K ноктасы — BMD төзек өчпочмагының үзәге, шуңа күрә $EF = \frac{2}{3} BD = \frac{2}{3} a\sqrt{2}$.

$$S_{\text{кис.}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{2}{3} a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}.$$

Җавап: $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

2. Башта тулы пирамиданың ян өслеге мәйданын табарга кирәк, ул $\frac{380\sqrt{3}}{3}$ кә тигез. Кисеп алынган өчпочмаклы пирамида белән өчпочмаклы тулы пирамиданың ян өслекләренең мәйданнары чагыштырмасы 4 : 25 кебек. Ул вакытта

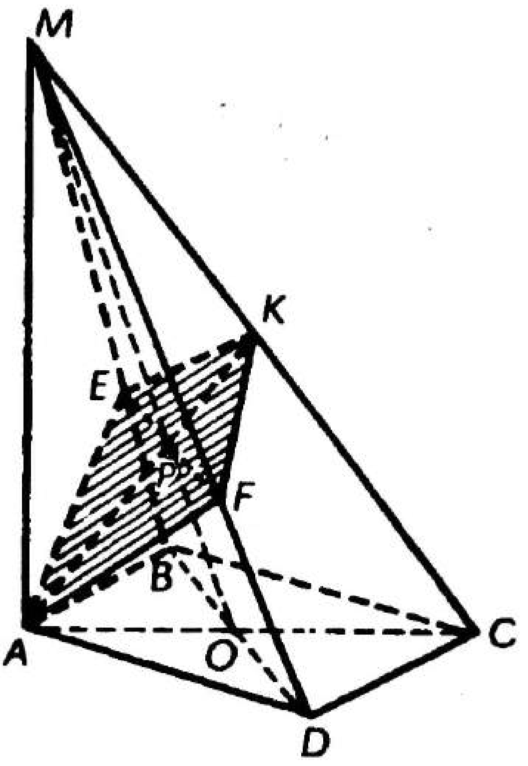
$$S_{\text{к. пир.}} = \frac{21}{25} \cdot S_{\text{ян т. пир.}} = \frac{21}{25} \cdot \frac{380\sqrt{3}}{3} = \frac{532\sqrt{3}}{5}.$$

Җавап: $\frac{532\sqrt{3}}{5}$.

Вар. 8. **1.** 120 см^2. Кисем 92 нче рәсемдә күрсәтелгән. $AK = \frac{1}{2} MC$ һәм P ноктасы BMD өчпочмагы медианаларының кисешү ноктасы икәнен исәпкә алырга кирәк. Алга таба 7 нче вариантның 1 нче мәсьәләсе кебек үк чишелә.

2. $\frac{15}{4}(77 + 3\sqrt{281})$ см^2. Мәсьәләне чишү принцибы 7 нче вариантның 2 нче мәсьәләсе кебек үк.

$$S_{\text{ян к. пир.}} = \frac{15}{16} \cdot S_{\text{ян т. пир}}$$



Рәс. 92

М—19

Вар. 1. **1.** 1) $\overrightarrow{B_1D_1}$, $\overrightarrow{BD}$; 2) $\overrightarrow{B_1A}$, $\overrightarrow{C_1D}$; 3) $\overrightarrow{C_1A_1}$, $\overrightarrow{B_1D_1}$, $\overrightarrow{D_1B_1}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$.
2. Әгәр $a \parallel \alpha$ булса.

Вар. 2. **1.** 1) $\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{D_1A}$, $\overrightarrow{C_1B}$; 2) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{D_1C_1}$; 3) $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{B_1A}$, $\overrightarrow{D_1C}$, $\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{DC_1}$, $\overrightarrow{C_1D}$.
2. Әйе, мөмкин. Мәсәлән, әгәр $\alpha \parallel \beta$ булса.

Вар. 3. **1.** 1) $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{C_1B_1}$; 2) $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{AA_1}$; 3) $\overrightarrow{B_1C}$, $\overrightarrow{C_1B}$, $\overrightarrow{BC_1}$.
2. Әйе, була.

Вар. 4. **1.** 1) $\overrightarrow{B_1D_1}$, $\overrightarrow{BD}$; 2) $\overrightarrow{C_1D}$, $\overrightarrow{B_1A}$; 3) $\overrightarrow{DB_1}$, $\overrightarrow{BD_1}$, $\overrightarrow{D_1B}$.
2. Әйе, була.

Вар. 5. **1.** 1) $\overrightarrow{EM}$ һәм $\overrightarrow{TK}$, $\overrightarrow{KT}$ һәм $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{TM}$ һәм $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{MT}$ һәм $\overrightarrow{KE}$;

2) $\overrightarrow{KT}$ һәм $\overrightarrow{EM}$, $\overrightarrow{TK}$ һәм $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{EK}$ һәм $\overrightarrow{MT}$, $\overrightarrow{KE}$ һәм $\overrightarrow{TM}$;

3) $\overrightarrow{KT}$, $\overrightarrow{TK}$, $\overrightarrow{EM}$ һәм $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{KE}$, $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{MT}$ һәм $\overrightarrow{TM}$, $\overrightarrow{ET}$, $\overrightarrow{TE}$, $\overrightarrow{KM}$ һәм $\overrightarrow{MK}$.

2. $\overrightarrow{AM}$ һәм $\overrightarrow{OE}$.

Вар. 6. **1.** 1) $\overrightarrow{MT}$ һәм $\overrightarrow{KE}$, $\overrightarrow{TM}$ һәм $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{MK}$ һәм $\overrightarrow{TE}$, $\overrightarrow{KM}$ һәм $\overrightarrow{ET}$.

2) $\overrightarrow{MT}$ һәм $\overrightarrow{KE}$, $\overrightarrow{TM}$ һәм $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{MK}$ һәм $\overrightarrow{TE}$, $\overrightarrow{KM}$ һәм $\overrightarrow{ET}$.

3) $\overrightarrow{MT}$, $\overrightarrow{TM}$, $\overrightarrow{KE}$ һәм $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{TE}$ һәм $\overrightarrow{ET}$, $\overrightarrow{KT}$, $\overrightarrow{TK}$, $\overrightarrow{ME}$ һәм $\overrightarrow{EM}$.

2. $\overrightarrow{EB_1}$ һәм $\overrightarrow{FC}$.

Вар. 7. **1.** 1) $\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{E_1D_1}$, $\overrightarrow{F_1C_1}$; 2) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{F_1D_1}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$.

2. M ноктасы аша нигез яссылыгына параллель яссылык үткәрергә кирәк. Бу яссылык BB_1 һәм CC_1 кабыргаларын тиңдәшле рәвештә K һәм P нокталарында кисеп үтсен ди. Ул вакытта

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{FD} \text{ һәм } \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{OC}.$$

1) F һәм E нокталары ADB һәм CDB өчпочмакларының AP һәм CP медианаларында ята. $\frac{EP}{AP} = \frac{EP}{CP} = \frac{1}{3}$ булгач, $FE \| AC$. Икенче шарттан $MN \| AC$ икәнлеге килеп чыга. Ул вакытта $FE \| MN$, $\overrightarrow{MN}$ һәм $\overrightarrow{FE}$ векторлары коллинеар.

2) $|\overrightarrow{FE}| = 6$ см.

Вар. 8. **1.** 1) а) $\overrightarrow{F_1C_1}$, $\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{E_1D_1}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{ED}$; б) $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{C_1F_1}$, $\overrightarrow{F_1C_1}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{D_1A_1}$, $\overrightarrow{B_1E_1}$, $\overrightarrow{E_1B_1}$;

2) $\overrightarrow{A_1E}$ һәм $\overrightarrow{A_1F_1}$.

2. 1) Мәсьәлә 7 нче вариантның 2, 1) мәсьәләсе кебек үк чишелә. 2) $|\overrightarrow{FE}| = 9$ см.

М—20

Вар. 1. **1.** $\overrightarrow{AD_1}$.

Вар. 2. **1.** $\overrightarrow{0}$.

Вар. 3. **1.** $\overrightarrow{AC_1}$. **2.** 17 см.

Вар. 4. **1.** $\overrightarrow{DC}$. **2.** 3 см.

Вар. 5. **1.** $a\sqrt{2}$. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ һәм $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{CE}$ икәнен исәпкә алырга кирәк. Ул вакытта

$$\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{FE}.$$

$$|\overrightarrow{FE}| = a\sqrt{2}.$$

2. Аермасын төзибез:

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{BC_1} - \overrightarrow{CA_1} =$$

$$= (\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB_1}) + (\overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{BC_1}) + (\overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{CA_1}) =$$

$$= \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{A_1A_1} = \overrightarrow{0}$$

Бу тигезлекнең дөреслеге шушының белән исбатлана да.

Вар. 6. **1.** $|\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CT}+\overrightarrow{CP}| = |\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CT}+\overrightarrow{TA}| = |\overrightarrow{KA}|$. APC өчпочмагы турыпочмаклы ($\angle APC = 90°$). Ул вакытта

$$KA = \sqrt{AP^2 + PK^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Җавап: $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

2. Мәсьәлә 5 нче вариантның 2 нче мәсьәләсе кебек үк чишелә.

Вар. 7. **1.** $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{DA_1} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA_1} - \overrightarrow{C_1B_1} = \overrightarrow{DA_1} - (\overrightarrow{DB_1} - \overrightarrow{DC_1}) = \overrightarrow{DA_1} - \overrightarrow{DB_1} + \overrightarrow{DC_1}$.

2. M — параллелепипед диагональләренең кисешү ноктасы.

Вар. 8. **1.** $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{C_1B_1} = \overrightarrow{DB_1} - \overrightarrow{DA_1} + \overrightarrow{DB_1} - \overrightarrow{DC_1} = 2\overrightarrow{DB_1} - \overrightarrow{DA_1} - \overrightarrow{DC_1}$.

2. K — октаэдрның симметрия үзәге.

М—21

Вар. 1. **2.** $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Вар. 2. **2.** $2(\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{MF})$.

Вар. 3. **1.** $\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. **2.** $-\frac{1}{2}$.

Вар. 4. **1.** $\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BM}$. **2.** -2.

Вар. 5. **1.** $\overrightarrow{MB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.

2. Бирелгән тигезлектән $(3 - m)\vec{a} = (2n - 4)\vec{b}$ икәнлеге килеп чыга. Моннан $m = 3$ һәм $n = 2$.

Вар. 6. **1.** $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{C_1P} = \overrightarrow{AC_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{C_1B} = \overrightarrow{AC_1} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CC_1}) = \overrightarrow{AC_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}$.

P CB_1B өчпочмагы медианаларының кисешү ноктасы икәнен исәпкә алырга кирәк.

2. $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$. Мәсьәлә 5 нче вариантның 2 нче мәсьәләсе кебек үк чишелә.

Вар. 7. **1.** DM биеклегенең нигезе — M ноктасы BC ягында ята, өстәвенә AM — ABC өчпочмагының биссектрисасы. Бу очракта $\frac{CM}{MB} = \frac{a}{b}$; $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AM} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{AB} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AC}$. Моннан

$$\overrightarrow{DM} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{AB} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}.$$

$$\overrightarrow{AB} = b\vec{e}_2,\ \overrightarrow{AC} = a\vec{e}_1 \text{ һәм } \overrightarrow{AD} = c\vec{e}_3.$$

Ул вакытта

$$\overrightarrow{DM} = \frac{ab}{a+b}\,\vec{e}_1 + \frac{ab}{a+b}\,\vec{e}_2 - c\vec{e}_3.$$

Җавап: $\frac{ab}{a+b}\,\vec{e}_1 + \frac{ab}{a+b}\,\vec{e}_2 - c\vec{e}_3$.

2. $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} + k(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = \vec{a} + k\vec{c} - k\vec{b}.$

Җавап: $\vec{a} + k\vec{c} - k\vec{b}$.

Вар. 8. **1.** Шарттан A_1 түбәсенең BAD почмагының AP биссектрисасына ($P \in BC$) проекцияләнгәнлеге килеп чыга. Андый очракта $AB = BP = b$; $\overrightarrow{A_1P} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AA_1}$. $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + \frac{b}{a}\overrightarrow{AD}$. Ул вакытта

$$\overrightarrow{A_1P} = \overrightarrow{AB} + \frac{b}{a}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1} = b\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 - c\vec{e}_3.$$

Җавап: $b\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 - c\vec{e}_3$.

2. EPF һәм ABC өчпочмакларының охшашлыгыннан $\frac{EF}{AC} = \frac{2}{5}$ икәнлеге килеп чыга.

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OE} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OE} + \frac{2}{5}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \vec{m} + \frac{2}{5}\vec{k} - \frac{2}{5}\vec{p}.$$

Җавап: $\vec{m} + \frac{2}{5}\vec{k} - \frac{2}{5}\vec{p}$.

М—22

Вар. 1. **1.** $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c} - \vec{b}$. **2.** $\overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DD_1}$.

Вар. 2. **1.** $\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$. **2.** $\frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$.

Вар. 3. **1.** $\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AA}$

2. $DABC$ тетраэдрын тикшерик. E — AC кабыргасының уртасы, ә F — DB кабыргасының уртасы һәм O EF кисемтәсенең уртасы булсын. Ул вакытта:

$$\overrightarrow{CO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CF}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}.$$

Хәзер P — AD ның уртасы, F — BC ның уртасы һәм O_1 PF ның уртасы булсын. Ул вакытта

$$\overrightarrow{CO_1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}.$$

Әгәр хәзер AB һәм DC кабыргаларының урталарын тоташтыручы кисемтәнең уртасы булган O_2 ноктасын карасак, ул вакытта бу очракта да табабыз:

$$\overrightarrow{CO_2} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}.$$

Моннан $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CO_1} = \overrightarrow{CO_2}$ икәнлеге, ягъни O, O_1 һәм O_2 нокталары тәңгәл килгәнлеге килеп чыга. Бирелгән раслама шуның белән исбатлана да.

Вар. 4. **1.** $\frac{1}{12}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$.

2. Мәсьәлә 3 нче вариантның 2 нче мәсьәләсе кебек үк чишелә.

Вар. 5. **1.** $\overrightarrow{AD_1}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DD_1}=2\overrightarrow{AF}+$ $+2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DD_1}=2a\vec{e}_1+2a\vec{e}_2+a\operatorname{tg}\varphi\vec{e}_3$.

Җавап: $2a\vec{e}_1+2a\vec{e}_2+a\operatorname{tg}\varphi\vec{e}_3$.

2. $ABCA_1B_1C_1$ призмасын карыйк. $A_2B_2C_2$ — призманың нигезгә параллель яссылык белән киселе булсын. M_1 һәм M — тиңдәшле рәвештә өске һәм аскы нигез медианаларының кисешү нокталары, ә M_2—кисем медианаларының кисешү ноктасы. Пространствода ирекле рәвештә O ноктасын сайлап алабыз. Ул вакытта $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=$ $=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OC_2}-\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OC_1})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2})$. Аналогия буенча $\overrightarrow{M_1M}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{C_1C})$. $\frac{A_1A_2}{A_1A}=\frac{B_1B_2}{B_1B}=\frac{C_1C_2}{C_1C}=k$ икәнен игътибарга алабыз. Ул вакытта

$$\overrightarrow{M_1M_2}=k\cdot\frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{C_1C})=k\cdot\overrightarrow{M_1M}.$$

Бу M_1, M_2 һәм M нокталарының бер турыда ятканын белдерә дә.

Вар. 6. **1.** $\frac{4}{5}a\vec{e}_1+\frac{4}{5}a\vec{e}_2+\frac{3a}{5\cos\varphi}\vec{e}_3$. Мәсьәлә 5 нче варианттагы 1 нче мәсьәлә кебек чишелә.

2. Мәсьәлә 5 нче варианттагы 2 нче мәсьәлә кебек чишелә.

Вар. 7. **1.** $\frac{BM}{MD}=\frac{x}{y}$ һәм $\frac{PN}{NC}=\frac{m}{n}$ булсын.

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}=\frac{y}{x+y}\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}+\frac{n}{m+n}\overrightarrow{CP}.$$

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{CP}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AP}.$$

Ул вакытта

$$\overrightarrow{MN}=\frac{y}{x+y}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{AB}+\frac{n}{m+n}(-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AP})=\left(\frac{y}{x+y}-\frac{n}{m+n}\right)\overrightarrow{AD}+$$

$$+\left(1-\frac{y}{x+y}-\frac{n}{m+n}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AP}. \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}.$$

$MN \parallel AF$ булгач,

$$\overrightarrow{MN}=k\overrightarrow{AF}=\frac{k}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{2}\overrightarrow{AP} \quad (2)$$

(1) һәм (2) тигезлекләреннән чыгып язабыз:

$$\begin{cases}\frac{y}{x+y}-\frac{n}{m+n}=0,\\ 1-\frac{y}{x+y}-\frac{n}{m+n}=\frac{k}{2},\\ \frac{n}{m+n}=\frac{k}{2}.\end{cases}$$

Моннан $k = \frac{2}{3}$ икәнен табарга мөмкин. $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{AF}$ булгач,

$$|\overrightarrow{MN}| = |k| \cdot |\overrightarrow{AF}| \text{ һәм } \frac{|\overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{AF}|} = |k|,$$

ягъни $\frac{MN}{AF} = \frac{2}{3}$. Җавап: $\frac{2}{3}$.

2. $z = 1 - x - y$; $\overrightarrow{OD} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + (1 - x - y) \cdot \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = x \times \times \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - x \cdot \overrightarrow{OC} - y \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC} = x(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) + y(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) = x \cdot \overrightarrow{CA} + y \cdot \overrightarrow{CB}$.

Моннан $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CA}$ һәм $\overrightarrow{CB}$ векторларының компланар икәнлеге, ягъни A, B, C һәм D нокталарының бер яссылыкта ятканлыгы килеп чыга.

Вар. 8. **1.** $\frac{BM}{MD} = \frac{m}{n}$ һәм $\frac{B_1N}{NC} = \frac{x}{y}$ булсын ди;

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \frac{y}{x+y}\overrightarrow{CB_1} =$$

$$= \frac{n}{m+n}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB} + \frac{y}{x+y}(\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AD}) =$$

$$= \left(\frac{n}{m+n} - \frac{y}{x+y}\right)\overrightarrow{AD} + \left(1 - \frac{n}{m+n}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{y}{x+y}\overrightarrow{AA_1}. \quad (1)$$

$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}$. $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{AC}$ булгач,

$$\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{AC_1} = k\overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AA_1}. \quad (2)$$

(1) һәм (2) тигезлекләреннән чыгып язабыз:

$$\begin{cases} \frac{n}{m+n} - \frac{y}{x+y} = k, \\ 1 - \frac{n}{m+n} = k, \\ \frac{y}{x+y} = k. \end{cases}$$

Моннан $k = \frac{1}{3}$; $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ һәм $\frac{x}{y} = \frac{2}{1}$ икәнлеге килеп чыга. Шулай булгач,

$\frac{BM}{MD} = \frac{1}{2}$ һәм $\frac{B_1N}{NC} = \frac{2}{1}$. Җавап: $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{1}$.

2. Әгәр A, B, C һәм D нокталары бер яссылыкта ятсалар, ул вакытта $\overrightarrow{CD} = x \times \times \overrightarrow{CA} + y \cdot \overrightarrow{CB}$. O — пространствода ирекле рәвештә алынган нокта булсын, ул вакытта $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$. Мондый очракта

$$\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = x \cdot \overrightarrow{OA} - x \cdot \overrightarrow{OC} + y \cdot \overrightarrow{OB} - y \cdot \overrightarrow{OC} \text{ һәм}$$

$$\overrightarrow{OD} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + (1 - x - y) \cdot \overrightarrow{OC} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC},$$

монда $x + y + z = 1$.

М-23

Вар. 1. 1) $(6+2\sqrt{3})$ см²; 2) 2 см²; 3) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; 4) 30°; 5) 2 см.

Вар. 2. 1) $4(\sqrt{7}+1)$ см²; 2) $2\sqrt{3}$ см²; 3) 60°; 4) $\arccos\frac{1}{\sqrt{7}}$; 5) $2\sqrt{2}$ см.

Вар. 3. 1) $4(4\sqrt{3}+3)$ см²; 2) $4\sqrt{3}$ см²; 3) 60°; 4) 30°;

5) $\overrightarrow{A_1M}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A_1A}+\frac{1}{3}\overrightarrow{A_1B}+\frac{1}{3}\overrightarrow{A_1C}$; 6) 90°.

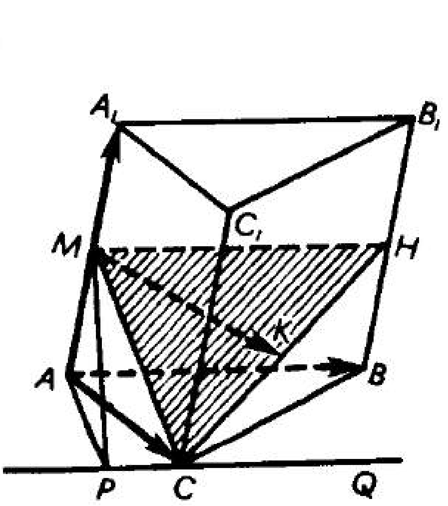
Вар. 4. 1) $(12\sqrt{3}+\sqrt{156})$ см²; 2) $4\sqrt{3}$ см²; 3) 60°; 4) $\operatorname{arctg} 2\sqrt{3}-60°$; 5) $\overrightarrow{DO}=$ $=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$; 6) 90°.

Вар. 5. Мәсьәләдәге бирелгәннәр буенча ABC өчпочмагының мәйданын табабыз: $S_{ABC}=84$. Өслек мәйданы $S=P_{ABC}\cdot AA_1+2S_{ABC}=588$ (рәс. 93). MHC — мәйданын табарга кирәк булган кисем. MHC һәм ABC яссылыклары PQ турысы буйлап кисешәләр, өстәвенә $PQ\parallel AB$. A ноктасыннан PQ турысына AP перпендикулярын төшерәбез дә M һәм P нокталарын тоташтырабыз; MP — MHC өчпочмагының биеклеге; $AP=\frac{2S_{ABC}}{AB}=$ $=\frac{2\cdot 84}{14}=12$. MAP өчпочмагыннан $MP=13$ икәнлеге килеп чыга; $S_{MHC}=\frac{1}{2}\cdot 14\cdot 13=91$; $\angle MPA$ — MHC һәм ABC яссылыклары белән төзелгән икекырлы почмакның сызыкча почмагы; $\cos MPA=\frac{AP}{MB}=\frac{12}{13}$, моннан $\angle MPA=\arccos\frac{12}{13}$; $\angle AMP$ — AA_1 турысы белән MHC яссылыгы арасындагы почмак; $\angle AMP=\arccos\frac{5}{13}$.

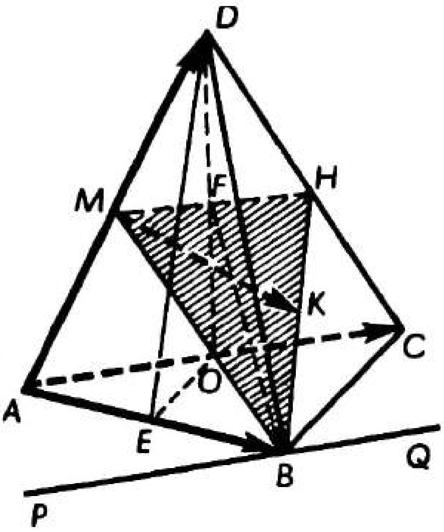
$$\overrightarrow{MK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Җавап: 1) 588 см²; 2) 91 см²; 3) $\arccos\frac{12}{13}$; 4) $\arccos\frac{5}{13}$;

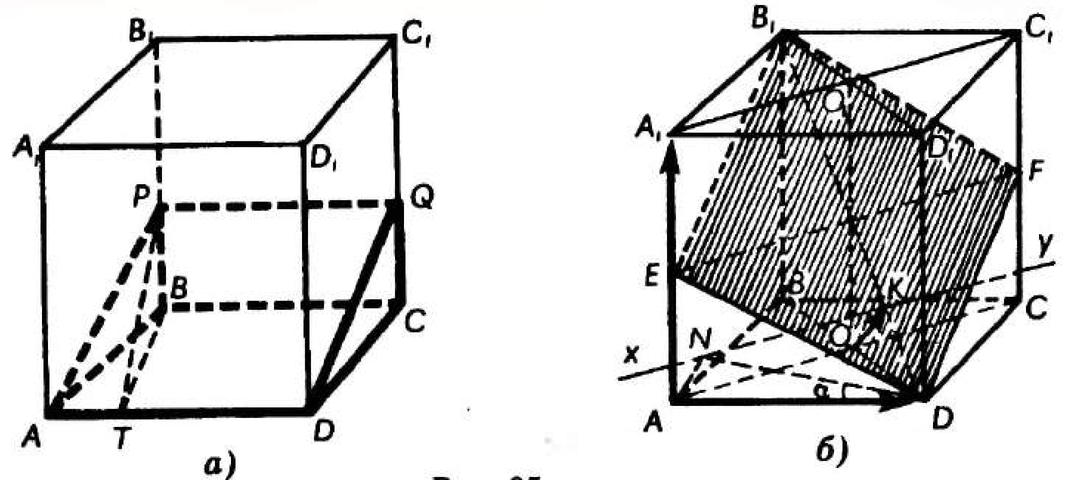
5) $-\frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; 6) 93 нче рәсемне кара.



Рәс. 93



Рәс. 94



Рәс. 95

Вар. 6. $DA = DB = DC$ булгач, D түбәсе нигезне камаучы әйләнәнең үзәгенә, ә бирелгән очракта AC гипотенузасының уртасына проекцияләнә (рәс. 94). O ноктасыннан AB га OE перпендикулярын төшерәбез дә D һәм E нокталарын тоташтырабыз; DE — ADB ян кырының биеклеге, $DO = \sqrt{3}$, $OE = \frac{\sqrt{2}}{2}$. DOE өчпочмагыннан

$DE = \sqrt{3 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{7}{2}}$ икәнлеге килеп чыга; $S_{ян} = \frac{1}{2} AC \cdot DO + 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot DE = \sqrt{7} + \sqrt{3}$;

FB — BMH кисеменең биеклеге. FOB өчпочмагыннан табабыз: $FB = \sqrt{\frac{3}{4} + 1} = \frac{\sqrt{7}}{2}$; $S_{кис} =$

$= \frac{1}{2} MH \cdot FB = \frac{1}{4} AC \cdot FB = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$; $\angle FBO$ — BMH һәм ABC яссылыклары белән төзелгән икекырлы почмакның сызыкча почмагы:

$$\operatorname{tg} \angle FBO = \frac{FO}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Моннан $\angle FOB = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\angle DBF$ — BD турысы белән BMH яссылыгы арасындагы почмак; $\operatorname{tg} \angle DBO = \frac{DO}{OB} = \sqrt{3}$. Моннан $\angle DBO = 60°$. Ул вакытта

$$\angle DBF = 60° - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$$

Җавап: 1) $(\sqrt{7} + \sqrt{3})$ см²; 2) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ см²; 3) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $60° - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$;

5) $-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$; 6) 94 нче рәсемне кара.

Вар. 7. **1**. AD һәм P ноктасы аша уткәрелгән кисем 95 нче *а* рәсемендә күрсәтелгән, $PQ \parallel AD$. B ноктасыннан AD ягына BT перпендикуляры төшерәбез дә P һәм T нокталарын тоташтырабыз. $PT \perp AD$ икәнлеге күренеп тора. PBT — $APBDQC$ призмасының перпендикуляр кисеме.

$$S_{ян} = P_{PBT} \cdot AD \cdot AD = 5;\ BT = \frac{24}{5};\ PT = \sqrt{\frac{576}{25} + 4} = \frac{26}{5}.$$

$$P_{перп.кис.} = \frac{24}{5} + \frac{26}{5} + 2 = 12 \cdot S_{ян} = 12 \cdot 5 = 60.$$

2. B_1D аша AC га параллель үтүче кисем 95 нче 6 рәсемдә күрсәтелгән, өстәвенә $EF \parallel AC$ һәм $EF \perp B_1D$; $S_{кис} = \frac{1}{2} EF \cdot B_1D$, ләкин $EF = AC$. Ул вакытта

$$S_{кис.} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6\sqrt{2} = 24\sqrt{2}.$$

BB_1D_1 яссылыгында O ноктасыннан B_1D га OK перпендикулярын төшерәбез. OK ның кисем яссылыгына перпендикуляр икәнен исбат итәргә мөмкин; $OK = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. AA_1 һәм B_1D арасындагы ераклык AO кисемтәсенең озынлыгы була; $AO = 4$. $B_1K : KD = 3 : 1$ икәнен күрәбез. Ул вакытта яза алабыз:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}_1 + \frac{3}{4}\overrightarrow{OD} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BB}_1) + \frac{3}{8}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{4}(-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AA}_1) + \frac{3}{8}\overrightarrow{BD} =$$

$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AA}_1 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) + \frac{1}{4}\overrightarrow{AA}_1 = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AA}_1.$$

AC һәм OK кисешүче турылары белән бирелгән яссылык кисем яссылыгын AC га параллель xy турысы буйлап кисә. Бу яссылыкта $OK \parallel AN$ үткәрәбез. AN — кисем яссылыгына перпендикуляр һәм $\angle ADN = \alpha$ исә AD белән кисем яссылыгы арасындагы почмак икәнлеге күренеп тора. $\sin\alpha = \frac{AN}{AD} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$; $\alpha = \arcsin\frac{3\sqrt{2}}{10}$.

Җавап: **1.** 60 см². **2.** 1) $24\sqrt{2}$ см²; 2) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ см; 3) 4 см; 4) $-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AA}_1$; 5) $\arcsin\frac{3\sqrt{2}}{10}$.

Вар. 8. 1) Пирамиданың ян өслеге мәйданы ян кырлары мәйданнарының суммасына тигез, шул ук вакытта MAD һәм MBC — тигезьянлы турыпочмаклы тигез өчпочмаклар. Пирамиданың биеклеге $MO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (рәс. 96). Рәсемдә $OE \perp CD$, ул вакытта шулай ук $ME \perp CD$. DMC өчпочмагының биеклеге $ME = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$. Ул вакытта

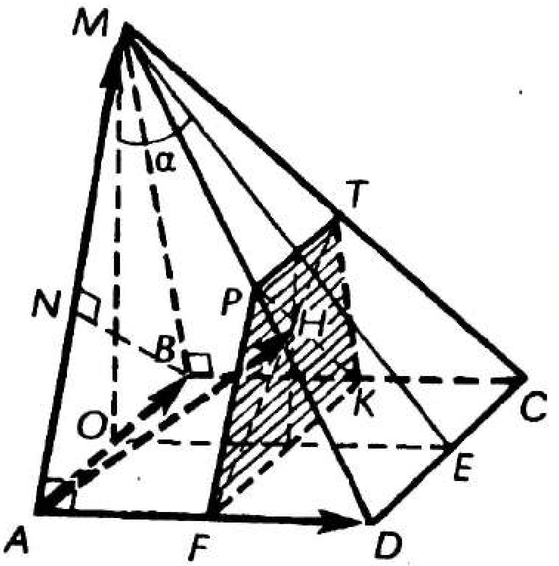
$$S_{ян} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} =$$

$$= \frac{a^2}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{7} + 4).$$

Кисемне төзегәндә кисем яссылыгы белән AMB кырының параллель булуы исәпкә алынды; $PT = \frac{a}{2}$, $FK = a$, ә кисемнең биеклеге $\frac{1}{2}MO$ га, ягъни $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ кә тигез.

Ул вакытта

$$S_{кис.} = \frac{1}{2}(a + \frac{a}{2}) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}.$$



Рәс. 96

DMC һәм *AMB* кырлары белән төзелгән икекырлы почмакның сызыкча почмагы $\angle OME = \alpha$ икәнлеген исбатлау кыен түгел.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{OE}{OM} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ һәм } \alpha = \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

AD AMB яссылыгына перпендикуляр булгач, $\angle AMD$ *AD* белән *AMB* яссылыгы арасындагы почмак була, ләкин кисем яссылыгы *AMB* яссылыгына параллель, шуңа күрә эзләнелгән почмак *AMD* почмагының зурлыгына тигез, ягъни 45°, *PHT* һәм *FHK* өчпочмакларының охшашлыгыннан $HT : HF = 1 : 2$ икәнлеге килеп чыга. Ул вакытта

$$\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AT} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AD} =$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} =$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} =$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

BC белән *MD* арасындагы ераклык *BC* белән *BC* га параллель *AMD* яссылыгы арасындагы ераклыкка тигез. Бу ераклык *AMB* өчпочмагының биеклеге *BN* ның озынлыгына тигез, ягъни $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Җавап: 1) $\frac{a^2}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{7} + 4)$; 2) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$; 3) $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$; 4) 45°; 5) $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$, 6) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

ӨСТӘМӘ МӨСТӘКЫЙЛЬ ЭШЛӘР

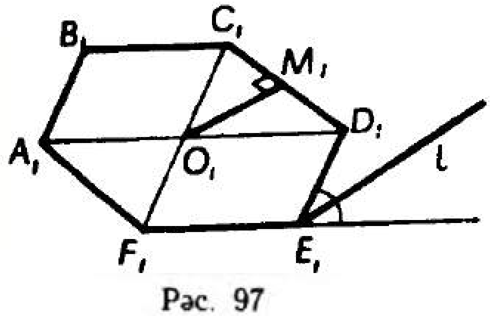
ӨМ-1

Вар. 1. **1**. Бер, ике яки өч нокта.

Вар. 2. **1**. Ике параллель туры, бер туры яки ике нокта.

Вар. 3. **1**. Параллелограмм буларак турыпочмаклыкның барлык үзлекләре дә саклана.

2. 97 нче рәсем. l биссектрисасы O_1M_1 гә параллель.

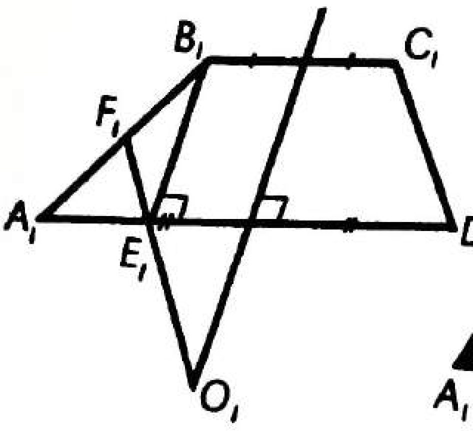


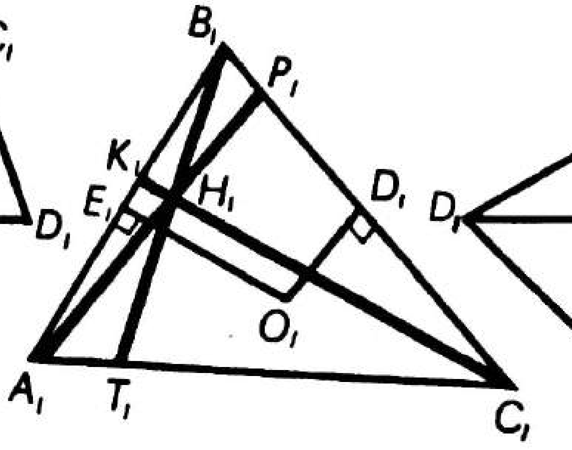
Рәс. 97

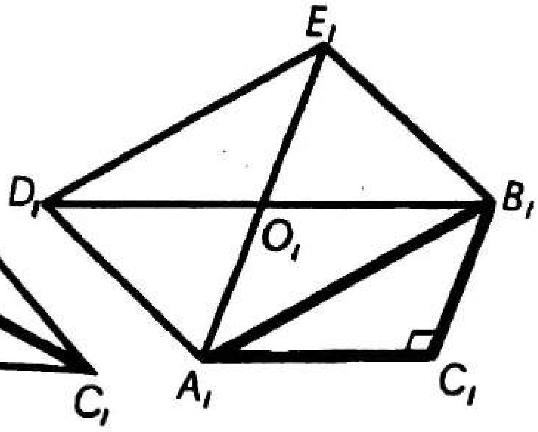
3. Сурәте булып ирекле рәвештә алынган $A_1B_1C_1$ өчпочмагы хезмәт итә. Өчпочмакның катетлары 2 : 3 чагыштырмасында булгач, аларның гипотенузага проекцияләренең чагыштырмасы 4 : 9 кебек була. Шуңа күрә гипотенузаның сурәтендә $A_1K_1 : K_1B_1 = 4 : 9$ булырдай K_1 ноктасын төзергә кирәк. Ул вакытта C_1K_1 өчпочмак биеклегенең сурәте булыр.

Вар. 4. **1**. Параллелограмм буларак ромбның барлык үзлекләре дә саклана.

2. *ABCD* — *BAD* почмагы 60° ка тигез ромб булсын. Ул вакытта *ABD* — төзек өчпочмак һәм *AD* ягына төшерелгән *BE* биеклеге аны урталай бүлә. Диагональләренең кисешү ноктасы *O* дан *AD* га төшерелгән *OF* перпендикуляры *BE* га параллель.







Рәс. 98 Рәс. 99 Рәс. 100

Ирекле рәвештә алынган $A_1B_1C_1D_1$ параллелограммы ромбның сурәте булып хезмәт итә. $A_1B_1D_1$ өчпочмагының B_1E_1 медианасын төзибез һәм $B_1E_1 \parallel O_1F_1$ не үткәрәбез; O_1F_1 — эзләнелгән перпендикуляр.

3. Өчпочмакка камаулы әйләнәнең үзәге аның биссектрисаларының кисешү ноктасы була. Ирекле рәвештә алынган $A_1B_1C_1$ өчпочмагы бирелгән өчпочмакның сурәте булсын. B_1E_1 медианасы бу өчпочмакның бер биссектрисасының сурәте була. Икенче биссектрисасының сурәтен төзү өчен B_1C_1 ягында $B_1K_1 : K_1C_1 = 4 : 5$ чагыштырмасы үтәлердәй K_1 ноктасын төзергә кирәк. Ул вакытта A_1K_1 — икенче биссектрисаның сурәте. Аларның кисешү ноктасы өчпочмакка камаулы әйләнәнең үзәге була да инде.

Вар. 5. **1**. Кисешүче ике туры, ике параллель туры, туры һәм нокта.

2. $A_1B_1C_1D_1$ параллелограммы — бирелгән квадратның сурәте һәм E_1 ноктасы A_1D_1 нең уртасы булсын. Бирелү буенча өчпочмакның катетлары 2 : 1 гә чагыштырмасында. Бу өчпочмакның биеклеге A_1M ның сурәтен төзибез (3 нче вариантның 3 нче мәсьәләсенә күрсәтмәне кара). Хәзер сурәттә $A_1M_1 \parallel C_1P_1$ не төзибез. Бу BE га C ноктасыннан төшерелгән перпендикулярның сурәте була да инде.

3. Камаучы әйләнәнең үзәге урта перпендикулярның кисешү ноктасында ята. Бу перпендикулярларның берсе бирелгән трапециянең симметрия үзәге була, ә икенчесе бу трапециядә BE биеклегенең нигезе аша үтә. Төзү 98 нче рәсемдә күрсәтелгән.

Вар. 6. **1**. Турылар параллель яки чалышма.

2. $A_1B_1C_1$ өчпочмагы — ABC өчпочмагының сурәте һәм O_1 камаучы әйләнә үзәгенең сурәте булсын. 99 нчы рәсемдә D_1 һәм E_1 — B_1C_1 һәм A_1B_1 якларының урталары. Ул вакытта O_1D_1 һәм O_1E_1 — урта перпендикулярларның сурәтләре. Мондый очракта A_1P_1 һәм C_1K_1 биеклекләренең сурәтләре O_1D_1 һәм O_1E_1 гә параллельләр. Өченче биеклеге B_1T_1 нең сурәте беренче ике биеклек сурәтләренең кисешү ноктасы H_1 аша үтә.

3. Төзү 100 нче рәсемдә күрсәтелгән. $A_1D_1E_1B_1$ параллелограммы — эзләнелгән квадратның сурәте.

ӨМ-2

Вар. 1. **1**. а) Юк; б) юк. **2**. $\arccos\frac{1}{3} \approx 70^\circ 32'$.

3. 45°. Чишкәндә өчкырлы почмак өчен косинуслар теоремасыннан файдаланырга кирәк.

Вар. 2. **1**. а) Юк; б) әйе. **2**. 60°.

3. $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 109°28'$. 1 нче вариантның 3 нче мәсьәләсенә күрсәтмәне кара.

Вар. 3. **1**. x өченче яссы почмакның зурлыгы булсын. Өчкырлы почмакның яссы почмаклары үзлегеннән чыгып язабыз:

$$x > 10°,$$
$$x < 210°,$$
$$x + 100° + 110° < 360°.$$

Моннан $10° < x < 150°$.

Җавап: $10° < x < 150°$.

2. Ике яссы почмагы: ADC һәм ADB 60°ка тигез булган $DABC$ өчкырлы почмагын тикшерик. AD кабыргалы икекырлы почмак 90°ка тигез. Ул вакытта косинуслар теоремасы буенча

$$\cos\angle BDC = \cos^2 60° + \sin^2 60° \cdot \cos 90° = \frac{1}{4}.$$

$$S_{BDC} = \frac{1}{2}\cdot 400\sqrt{1-\frac{1}{16}} = 200\frac{\sqrt{15}}{4} = 50\sqrt{15}.$$

Җавап: $50\sqrt{15}$.

3. $\angle AOB = \angle AOC = 60°$, $\angle BOC = 90°$ булган $OABC$ өчкырлы почмагын карарбыз. BAC яссылыгы BOC яссылыгына перпендикуляр һәм $AB = AC$. Ул вакытта A ноктасыннан BOC яссылыгына төшерелгән AM перпендикуляры BCның уртасы — M ноктасына, ягъни BOC турыпочмаклы өчпочмагын камаучы әйләнәнең үзәгенә төшәр. Моннан $AB = AC = AO$ икәнлеге килеп чыга. $\angle AOC = \angle AOB = 60°$ булгач, $AO = OB = OC$, шуны исбатларга кирәк иде дә.

Вар. 4. **1**. $54° < x < 90°$. Пирамиданың түбәсе янындагы яссы почмакларының суммасы 360° тан кимрәк булырга тиешлеген искә алырга кирәк.

2. Мәсьәлә 3 нче вариантның 2 нче мәсьәләсе кебек үк чишелә. Косинуслар теоремасы буенча $\cos\angle BDC = \frac{5}{8}$ икәнен табабыз. Ул вакытта

$$\sin\angle BDC = \frac{\sqrt{39}}{8} \text{ һәм } R = \frac{BC}{2\sin\angle BDC} = \frac{\sqrt{39}\cdot 8}{2\sqrt{39}} = 4.$$

Җавап: 4.

3. $\angle AOB = \angle AOC = 60°$, $\angle BOC = 90°$ булган $OABC$ өчкырлы почмагын карарбыз. $OA = OB = OC$ булсын. Ул вакытта $AO = AB = AC$ һәм A ноктасы турыпочмаклы өчпочмакны камаучы әйләнәнең үзәгенә, ягъни BCның уртасына проекцияләнгәнен исбатлау кыен түгел. Мондый очракта BAC яссылыгы туры почмак яссылыгына перпендикуляр.

Вар. 5. **2**. Призманың перпендикуляр кисеме $A_2B_2C_2$ не тøзибез; $A_2C_2 = AC\sin 45° = \sqrt{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$, $A_2B_2 = AB\sin 60° = 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3$. $B_2A_2C_2$ почмагын өчкырлы почмак өчен косинуслар теоремасын кулланып табабыз.

$$\cos 90° = \cos 45°\cdot\cos 60° + \sin 45°\cdot\sin 60°\cdot\cos\angle B_2A_2C_2;\ \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\cos\angle B_2A_2C_2 = 0;$$

$$\cos\angle B_2A_2C_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

B_2C_2 ягын косинуслар теоремасы буенча табабыз:

$$B_2C_2 = \sqrt{9+3-2\cdot 3\sqrt{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = 3\sqrt{2},$$

$$P_{A_2B_2C_2} = 3+\sqrt{3}+3\sqrt{2} = \sqrt{3}(\sqrt{3}+1+\sqrt{6}),$$

$$S_{\text{ян}} = 5\sqrt{3}(\sqrt{3}+1+\sqrt{6}).$$

Җавап: $5\sqrt{3}(\sqrt{6}+\sqrt{3}+1)$.

3. $\angle MDA = 45°$, $\angle ADC = 90°$ һәм $\cos\angle MDC = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ булган $DAMC$ өчкырлы почмагын карарга кирәк. Эзләнелә торган икекырлы почмак α булсын.

Ул вакытта

$$\cos 90° = \cos 45°\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} + \sin 45°\,\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\cos\alpha.$$

Моннан

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{7}} \text{ һәм } \alpha = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right) \approx 112°12'.$$

Җавап: $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right) \approx 112°12'$.

Вар. 6. **2**. $MABCD$ тøзек пирамидасын карыйк. $CMBD$ өчкырлы почмагында BCD яссы почмагы туры, ә калган икесе — MCD һәм MCB ны α дип тамгалыйк. MC кабыргасы янындагы икекырлы почмагы 120°. Ул вакытта өчкырлы почмак өчен косинуслар теоремасы буенча

$$\cos 90° = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos 120°.$$

Моннан $\operatorname{tg}^2\alpha = 2$. MK — DMC кырының биеклеге булсын. Ул вакытта

$$KC = m\cdot\operatorname{ctg}\alpha = \frac{m}{\sqrt{2}}.$$

Андый очракта нигезенең ягы $m\sqrt{2}$ гә тигез.

$$S_{\text{ян}} = \frac{1}{2}P_{\text{н}}\cdot MK = 2m\sqrt{2}\cdot m = 2m^2\sqrt{2}.$$

Җавап: $2m^2\sqrt{2}$.

3. $\cos\angle MDA = \cos\angle MDC = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\angle ADC = 90^\circ$ булган $DAMC$ өчкырлы почмагын карарга кирәк. α — эзләнелә торган икекырлы почмакның зурлыгы булсын. Ул вакытта

$$\cos 90^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos\alpha.$$

Моннан $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ һәм $\alpha = 120^\circ$.

Җавап: 120°.

КОНТРОЛЬ ЭШЛӘР

К-1

Вар. 1. **2.** 2) Турылар чалышма, 60°. **3.** Теләсә нинди.

Вар. 2. **2.** 1) Кисешү сызыгы C түбәсе аша AB һәм DE турыларына параллель үтә.

3. Кисешәләр яки параллель.

4. EF һәм MK турылары чалышма. Әгәр AB турысы CD ны киссә яки $AB \parallel CD$ булса, аларның параллель булуы да мөмкин.

Вар. 3. **2.** 2) Турылар чалышма, 70°.

3. Турылар үзара теләсә нинди торышта булырга мөмкин.

Вар. 4. **2.** 2) Турылар чалышма, 30°.

3. Юк, ярамый.

4. AC һәм BD чалышма турылар була. AB турысы CD ны киссә яки $AB \parallel CD$ булса, алар кисешергә мөмкин.

К-2

Вар. 1. **3**. 12.

Вар. 2. **2**. Турылар чалышма. **3.** $2a + a\sqrt{2}$.

Вар. 3. **3.** 6.

Вар. 4. **2.** Турылар чалышма. **3.** 18.

К-3

Вар. 1. **1.** 15 см. **2.** 2) 60°; 3) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{2}$.

3*. $\sqrt{3}$ см. $EO \parallel BC$ икәнен исәпкә алырга кирәк, монда O — M ноктасыннан ABC яссылыгына төшерелгән MO перпендикулярының нигезе; O — гипотенузаның уртасы. E ноктасыннан BMC яссылыгына кадәр ераклык бу яссылыкка кадәр ераклыкка тигез.

Вар. 2. **1.** 45°. **2.** 2) 45°.

3*. $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ см. $AB \parallel CD$ икәнен игътибарга алырга кирәк.

Вар. 3. **1.** 4 см. **2.** 2) 60°; 3) arctg $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3*. 1 см. $EO \parallel BC$ (монда $O - M$ ноктасыннан ABC яссылыгына төшерелгән перпендикулярның нигезе) икәнен игътибарга алырга кирәк.

Вар. 4. **1.** 60°. **2.** 2) 30°.

3*. $\frac{3\sqrt{10}}{8}$ см. $OE \parallel BC$ (монда $O - M$ ноктасыннан ABC яссылыгына төшерелгән перпендикулярның нигезе) икәнен исәпкә алырга кирәк.

К-4

Вар. 1. **1.** $a^2(6+\sqrt{3})$. **2.** $25(4+\sqrt{6})$.

3*. Пирамиданы $ACBF$ турыпочмаклыгы нигезе булган пирамида итеп төзеп бетерергә кирәк. Мәсьәләне чишү өчен DBF почмагының зурлыгын табарга кирәк. DFB өчпочмагында $DB = DF = 5\sqrt{5}$; $FB = 10\sqrt{3}$. Ул вакытта $\cos\angle DBF = \frac{5\sqrt{3}}{5\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

Җавап: $\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Вар. 2. **1.** $3(48+5\sqrt{3})$ см². **2.** 50.

3*. Биеклекнең нигезе — O ноктасыннан MC кабыргасына OE перпендикулярын төшерергә кирәк. Ул вакытта BED — эзләнелгән почмак. MOC өчпочмагыннан $OE = \frac{MO \cdot OC}{MC} = \frac{1 \cdot 4}{\sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$. Моннан $\operatorname{tg}\angle OED = \frac{3\sqrt{17}}{4}$.

Мондый очракта $\angle OED = \operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{17}}{4}$ һәм $\angle BED = 2\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{17}}{4}$. Җавап: $2\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{17}}{4}$.

Вар. 3. **1.** 62,4 см². **2.** 360.

3*. Ераклык MBA өчпочмагының B түбәсеннән төшерелгән биеклегенең озынлыгына тигез булыр. Җавап: $\frac{60}{13}$.

Вар. 4. **1.** $8\sqrt{7}(1+\sqrt{3})$. **2.** 108 см².

3*. Өске нигез яссылыгында A_1 түбәсеннән C_1D_1 гә A_1K перпендикулярын төшерергә кирәк. $\angle A_1D_1C_1 = 150°$ булгач, K ноктасы D_1C_1 ягында ятмый.

$A_1K = \frac{1}{2}A_1D_1 = 1$, $A_1C = 2\sqrt{14}$. Мәсьәләне чишү өчен A_1CK почмагының зурлыгын табарга кирәк:

$$\sin\angle A_1CK = \frac{A_1K}{A_1C} = \frac{1}{2\sqrt{14}}.$$ Җавап: $\arcsin\frac{1}{2\sqrt{14}}$.

К-5

Вар. 1. **1.** 1) $\overrightarrow{AA_1}$; 2) $\overrightarrow{CA}$.

2. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

3. Әгәр $\vec{m} = k\vec{n}$ $(k \neq 0)$ булса, $\vec{m}$ һәм $\vec{n}$ векторлары коллинеар. Ул вакытта $p\vec{a} + q\vec{b} + 8\vec{c} = k\vec{a} + kp\vec{b} + kq\vec{c}$.

Моннан:

$$\begin{cases} p = k \\ q = kp \\ 8 = kq. \end{cases}$$

Системаны чишеп, $k = 2$, $p = 2$ һәм $q = 4$ икәнен табабыз.

Җавап: $k = 2$, $p = 2$, $q = 4$.

4*. $\overrightarrow{HM}$, $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{DC}$ векторларының компланар икәнен исбатларга кирәк.

$$\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{DH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}. \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}. \quad (2)$$

(1) һәм (2) тигезлекләреннән $\overrightarrow{HM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$, ягъни $\overrightarrow{HM}$, $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{DC}$ векторларының компланар икәнлеге килеп чыга, шуңа күрә HM, AB һәм DC турылары бер яссылыкка параллель.

Вар. 2. **1.** 1) $\overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{A_1C}$. **2.** $-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

3. $2\vec{m} = 2\vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{c}$, $3\vec{n} = 6\vec{a} - 3\vec{b} + 3\vec{c}$. Моннан

$$2\vec{m} + 3\vec{n} = 8\vec{a} - \vec{b} + \vec{c},$$

ягъни $\vec{p} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$. Бу исә күрсәтелгән векторларның компланар икәнен белдерә.

4*. P_1, P_2, P_3 һәм P_4 — тиңдәшле рәвештә NA, MD, NB һәм MC кисемтәләренең урталары булсын. Пространствода ирекле рәвештә O ноктасы алабыз. Ул вакытта

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{ON}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD}), \quad (1)$$

$$\overrightarrow{P_4P_3} = \overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_4} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CN}), \quad (2)$$

ләкин $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ һәм $\overrightarrow{ND} = \overrightarrow{CN}$. Ул вакытта (1) һәм (2) дән $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_4P_3}$, ягъни $P_1P_2P_3P_4$ — параллелограмм икәнлеге килеп чыга. (Башта P_1, P_2, P_3 һәм P_4 нокталарының бер турыда ятмаганын исбатларга кирәк.)

Вар. 3. **1.** 1) $\overrightarrow{B_1A}$; 2) $\overrightarrow{CC_1}$. **2.** $\frac{1}{3}\overrightarrow{DA} - \frac{1}{6}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.

3. $k = 2$. Мәсьәлә 1 нче вариантның 3 нче мәсьәләсе кебек үк чишелә.

4*. Мәсьәлә 1 нче вариантның 4* нче мәсьәләсе кебек үк чишелә.

Вар. 4. **1.** 1) $\overrightarrow{D_1A}$; 2) $\overrightarrow{C_1B}$. **2.** $\frac{1}{3}\overrightarrow{BD} - \frac{1}{6}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

3. $\vec{p} = 2\vec{n} - \vec{m}$ икәнен исбатларга кирәк.

4*. M_1, M_2, M_3 һәм M_4 — тиңдәшле рәвештә A_1BB_1, B_1CC_1, C_1DD_1 һәм A_1AD_1 өчпочмаклары медианаларының кисешү нокталары булсын. Пространствода ирекле рәвештә O ноктасы сайлап алабыз. Ул вакытта

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC}) - $$

$$- \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{BC}), \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{M_4M_3} = \overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_4} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1}) - $$

$$- \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD_1}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{AD}). \qquad (2)$$

$ABCD$ параллелограмм булганга күрә, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Ул вакытта (1) һәм (2) дән $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_4M_3}$, ягъни $M_1M_2M_3M_4$ — параллелограмм икәнлеге килеп чыга. (Башта M_1, M_2, M_3 һәм M_4 нокталарының бер турыда ятмаганын исбатларга кирәк.)

МӨСТӘКЫЙЛЬ ЭШ, КОНТРОЛЬ ЭШЛӘРНЕҢ, ШУЛАЙ УК МАТЕМАТИК ДИКТАНТНЫҢ ДӘРЕСЛЕКТӘГЕ ПУНКТЛАР БУЕНЧА БҮЛЕНЕШЕ

Эш	Темалар	Дәреслектәге пунктлар
М—1	Стереометрия аксиомалары һәм аларның нәтиҗәләре	2, 3
М—2	Турыларның пространствода үзара торышы	4, 5, 7
М—3	Туры белән яссылыкның параллельлеге	6, 9
М—4	Яссылыкларның параллельлеге	10, 11
М—5	Тетраэдр һәм параллелепипед	12, 13
М—6	Кисем төзүгә мәсьәләләр	14
М—7	Туры һәм яссылыкның перпендикулярлыгы. Яссылыкка перпендикуляр параллель турылар	15, 16
М—8	Туры белән яссылыкның перпендикулярлык билгесе	17, 18
М—9	Ноктадан яссылыкка кадәр ераклык	19
М—10	Өч перпендикуляр турындагы теорема.	20
	Туры белән яссылык арасындагы почмак	21
М—11	Икекырлы почмак	22
М—12	Перпендикуляр яссылыклар. Турыпочмаклы параллелепипед	23, 24
М—13	Туры призма һәм туры параллелепипед	27
М—14	Туры призманың өслек мәйданы	27
М—15*	Авыш призма. Өслек мәйданы	кайбер мәсьәләләрдә каралган
М—16	Төзек пирамида	29
М—17*	Төзек булмаган пирамида. Өслек мәйданы	кайбер мәсьәләләрдә каралган
М—18	Пирамиданың кисемнәре. Кисек пирамида	30
М—19	Пространствода вектор төшенчәсе	34, 35
М—20	Векторларны кушу һәм алу	36, 37
М—21	Векторны санга тапкырлау	38
М—22	Компланар векторлар. Векторларны мәсьәләләр чишүдә куллану	39, 40, 41
М—23	Кабатлау	барлык бүлекләр материалы буенча
ӨМ—1	Фигураның параллель проекциясе. Фигураларның сурәте	1 нче кушымта (1, 2, 3)
ӨМ—2	Күпкырлы почмаклар. Өчкырлы почмак өчен косинуслар теоремасы	—
К—1	Стереометрия аксиомалары. Турыларның үзара торышы. Туры һәм яссылыкның параллельлеге	2—9

Эш	Темалар	Дәреслектәге пунктлар
К—2	Параллель яссылыклар. Кисемнәр төзү	10—14
К—3	Туры һәм яссылыкларның перпендикулярлыгы	15–24
К—4	Күпкырлыклар	27—30
К—5	Пространствода векторлар	34—41
МД—1	Стереометрия аксиомалары. Туры һәм яссылыкларның параллельлеге	2—14
МД—2	Туры һәм яссылыкның перпендикулярлыгы	15—24
МД—3	Күпкырлыклар	27—30
МД—4	Пространствода векторлар	34—41

ЭЧТӘЛЕК

СҮЗ БАШЫ 3

МӨСТӘКЫЙЛЬ ЭШЛӘР 5

ӨСТӘМӘ МӨСТӘКЫЙЛЬ ЭШЛӘР 67

КОНТРОЛЬ ЭШЛӘР 71

МАТЕМАТИК ДИКТАНТЛАР 97

ҖАВАПЛАР 104

Учебное издание

Зив Борис Германович

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ГЕОМЕТРИИ
ДЛЯ 10 КЛАССА

(перевод с русского на татарский язык)

Редакция мөдире *Р. С. Вафина*
Редакторы *Ф. М. Хафизова*
Бизәлеш редакторы *Р. А. Сәйфуллина*
Техник редакторы *Ә. С. Трофимова*
Корректоры *Р. Ә. Фәйзуллина*

Нәшриятка 183 нче номерлы лицензия 1997 елның 7 апрелендә бирелгән. Җыярга тапшырылды 21.10.96. Басарга кул куелды 05.12.2000. Форматы $60\times90^1/_{16}$. Газета кәгазе. «Антиква» гарнитурасы. Офсет басма. Басма табагы 9,0. Нәшер-хисап табагы 5,58. Тиражы 5 300 д. Заказ А-72.

«Мәгариф» нәшрияты. 420111. Казан, Бауман урамы, 19.
Издательство «Магариф». 420111. Казань, ул. Баумана, 19.
Тел./факс (8432) 92-57-48.

ДУП «Полиграфия-нәшрият комбинаты».
420111. Казан, Бауман урамы, 19.